

「最短路徑與人生」教師手冊

壹、給教師的話

何謂演算法 Algorithm?

演算法(algorithm)的意義為：「在有限步驟內解決數學問題的程序」。在計算機科學的領域中，我們所解決的問題不再只限於數學問題，因此演算法泛指適合被實作為計算機程式的解題方法。例如算出兩個自然數的最大公因數的輾轉相除法，即為一個演算法，亦稱為歐幾里得演算法。而演算法能發揮最大的功用在於與計算機的結合，在處理結構龐大的問題時，需要借用計算機的處理能力，將演算法翻譯成程式語言，使計算機可以依循演算法的步驟求得結果。可想而知，隨著計算機的發明，演算法即進入蓬勃發展的階段。

一般而言，演算法具有下列五個特性：

1. **準確描述的輸入(Input)**：演算法通常是接受一些輸入，加以處理或運算，而產生一些輸出值。這些輸入必須有清楚的型別和個數描述。例如前面提到的 歐幾里得演算法，需要兩個自然數作為輸入。
2. **每一指令必須具有明確性(Definiteness)及有效性(Effectiveness)**：指令必須清楚而不造成混淆，並且能讓人們用紙筆來執行。
3. **正確性(Correctness or Definiteness)**：演算法既是以解題為目的，所以我們必須能夠證明一演算法可以正確地解決問題。
4. **有限性(Finiteness)**：演算法必須在有限步驟內結束。重點通常不在於執行步驟的確實數目，而是它的上限。也就是說，我們比較想知道執行此演算法的步驟(或時間)不會超過某個上限。這對我們了解並評估演算法的優劣相當重要。
5. **結果的描述和輸出(Output)**：例如歐幾里得演算法的輸出，是兩個自然數的最大公因數，也是自然數，所以輸入兩個自然數，則輸出為一個自然數。

高一課程中的演算法範例

對於一個實係數多項式 $f(x)$ 除以一個一次式 $(ax+b)$ ，我們可以用多項式的長除法與綜合除法來求出商式與餘式。長除法與綜合除法分別為兩個不同的演算法，以演算法的角度來看，綜合除法較長除法簡易，程式需要判斷的次數較少，程式語言的結構也比較簡單，但想法卻比較難。一個簡單的演算法，背後通常蘊含著較難的想法。【這裡也可以談論為何在高一課程當中要學綜合除法？】

在第一冊第二章時，插值多項式單元介紹了三種插值法，分別為假設「一般式解聯立方程」、「Newton 插值法」與「Lagrange 插值法」，三種方法分別為不同的演算法。其中 Lagrange 插值法為一種較簡易的演算法，在表示為程式語言時，演算法的結構較簡單。

輾轉相除法也是一個很適合拿來當作演算法的範例，給定兩個自然數，利用輾轉相除法就可以求得兩自然數的最大公因數，其中的步驟不斷的重複，就是演算法當中的迴圈，然而試想，學生一開始學習輾轉相除法時，通常是否只會算法，卻不會解釋為何執行完畢的結果即為兩自然數的最大公因數。這就是人腦與電腦的差別，當演算法轉換成程式語言之後，計算機只負責執行，並無法判斷每個步驟的道理以及動機，事實上，計算機無法賦予輸出結果任何意義，只有設計演算法的人，才會知道整個演算法的概念以及最終結果的意涵。因此在教學過程當中，最終還是要講解輾轉相除法證明，也就是要證明演算法的正確性。

($a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $a = qb + r$, 其中 $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq b - 1$, 若 $(a, b) = d$, 則 $(b, r) = d$)

本課程以實際問題引發學生思考，近而透過演算法協助學生培養創新研究問題與發表能力，教學目標區分為專業知識與思維批判兩部分：

專業知識

1. 能夠將實際問題轉換為圖形上的問題或數學問題（簡單建模的能力）。
2. 能夠明白最短路徑的問題（與生活經驗的連結）。
3. 能夠學會 Dijkstra's Algorithm 的執行步驟。
4. 能夠瞭解演算法的意義。
5. 能夠自己設想一個生活問題，將其建模成為一個數學問題。

思維批判

1. 能夠思考問題的呈現方式與多樣化的表達。
2. 能夠增強個人對於生活經驗與數學問題之間的連結。
3. 能夠發揮個人參與小組討論的參與度。
4. 能夠增進個人發問以及台上口語表達的能力。
5. 能夠聆聽他人想法，針對討論的內容提出質疑並能給予建議。
6. 能夠批判求解步驟的正確性及合理性。
7. 能夠對於求解的方法進行批判、優劣分析。
8. 能夠釐清最佳解與較佳解的不同，並能夠思考兩者之間的取捨。
9. 對於一個問題，可以發揮創意思考，提升將問題演化的能力。
10. 能夠從最短路徑問題，反思自我價值以及高一選組的方向。

貳、課程/教學單元描述（含教材分析與課程架構）

本課程可發展為四個部分：最短路徑問題、最小生成術、旅行銷售員與中國郵差問題。

1. 最短路徑問題 The Shortest Path Problem

面對各種事情，人們總是希望能夠以最「有效率」的方式來解決，然而所謂的效率優劣的基準，將取決於當事者對於自身特定的考量。一個問題呈現的方式，影響著後續分析的方便性，故能夠將問題中的資訊以一種好的型態來表示（易於分析），即是重要的課題。

如何到學校？

你我都一樣，從住家到北一女各有許多不同的方案，整個路程可能是以幾種不同交通方式組合而成，舉例來說，從居住處到北一女中，可有下列不同的方式（僅參考部分情況）：

1. 從家裡騎機車（可經忠孝橋或中興橋）直達北一女中。
2. 從家裡騎機車至台北車站後，再步行至北一女中。
3. 從家裡騎開車（可經忠孝橋或中興橋）直達北一女中。
4. 從家步行至三重中華路口公車站，搭乘 299 至台北車站後下車，再步行至北一女中。
5. 從家步行至三重中華路口公車站，搭乘 652 至新光三越後下車，再步行至北一女中。
6. 從家步行至三重中華路口公車站，搭乘 617 至民權西路站後下車，轉搭捷運至台大醫院站，再步行至北一女中。
7. 從家中步行至三重三民街公車站，搭乘 640 至貴陽街，再步行至北一女中。
8. 從家中步行至三重菜寮站，搭捷運至台大醫院站，再步行至北一女中。
9. 從家裡搭計程車到北一女中。

請試著考量自己從家中到達北一女中的各種不同情形，並考慮將如何呈現你的情況（條列式、表格式、圖像式）。

如何做選擇？

從住家要抵達北一女中的方式有很多種，但是隨著當下考量的不同，將會選擇不同的方案。若是以舒適度為主要考量，則一出門就攔台計程車似乎是不錯的方式。但是若以經費上作為主要考量的話，每天搭計程車上學則是最差的決定了。

（問題 1）當自己選擇從家中到達北一女中的方案中，你會考量哪些因素來做最後的決定？

一趟旅程，所要考量的因素往往因個人的不同而有所差異，所花的費用、所需的時間、旅途的安全性、方便性、特殊中途點考量都將影響你的決定。

量化與賦值

為了找尋最佳策略，我們必須量化所考量的因素，以時間為例，我們需要瞭解旅途中各據點之間所需花費的時間，譬如搭乘 299 公車從三重中華路口到台北車站所需的時間、從台北車站步行到北一女中所需的時間等等。

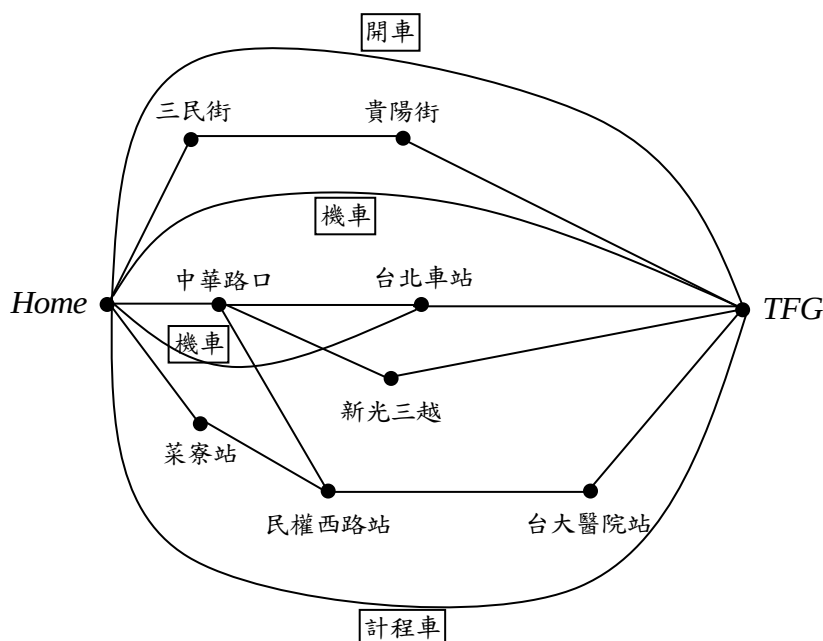
(問題 2) 試針對自己的住家到北一女中的各方案中，估計各據點之間所需的時間分別為何？
(各方案以幾種較可能的方式來討論即可，時間僅先做初步的估計)

建模的開始：圖的表達與邊的權重

在考慮旅途的各種方案之下，除了條列式的逐條舉例之外，為了以簡潔的方式來呈現各種旅途方案，我們可以將各據點視為平面上的一個「點(vertex)」，各據點之間，若有某方案的路線銜接兩個據點，則表示兩據點有關係，直覺上我們以一條曲線連接此兩據點，然而曲線的彎曲程度與長度並不具任何意義，目的只在呈現點跟點之間的關連性，我們將這些曲線稱為「邊(edge)」，也就是說一個邊的重點只在於連結了哪兩個點。這種以「點」、「邊」所構成的抽象圖形，我們簡稱為「圖(graph)」。

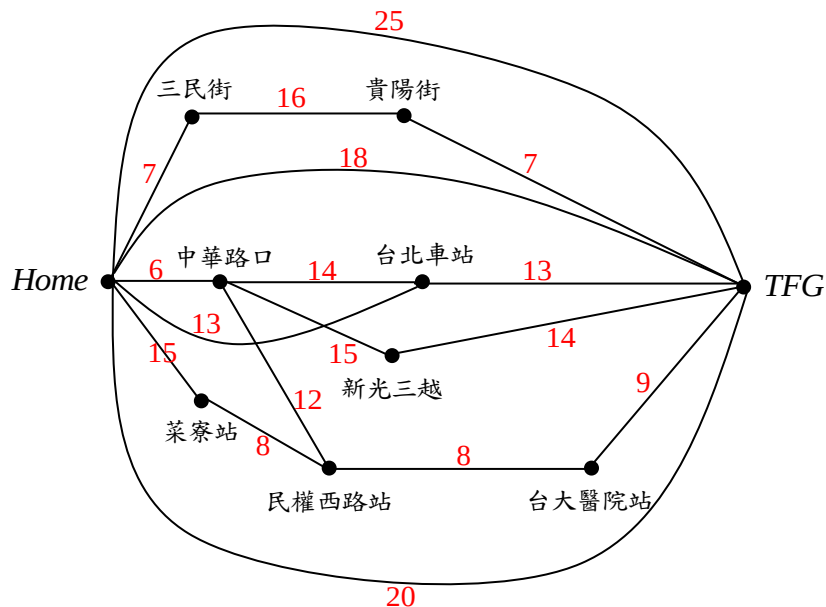
一個圖能夠簡單的呈現出整個問題的架構，不僅能夠提供視覺上的效果，更是將實際問題模式化的重要步驟，圖能提供一個模型，讓我們從中去討論解決問題的方法，是一個十分強而有力的陳述。

以下則為本人分析從住家到北一女中各式方案的「圖」。**【讓學生上台分享自己的表達方式】**



若考慮抵達北一女中所需的時間，各據點之間將具有通勤時間，為了方便起見，我們將兩據點的通勤時間紀錄在兩據點的邊上，換句話說，我們依實際情形賦予圖上的每個邊一個「**權重(weight)**」，這樣邊上被賦予權重的圖，我們稱為**權重圖 (weighted graph)**。

以下為本人從住家到北一女中的權重圖：



【以上重點在於如何引導學生能夠主動想到以圖的概念來表達問題，非直接提供方法。透過問題 2 與問題 3 來引導，可採問答式來激發學生思考】

你在乎的是什麼？

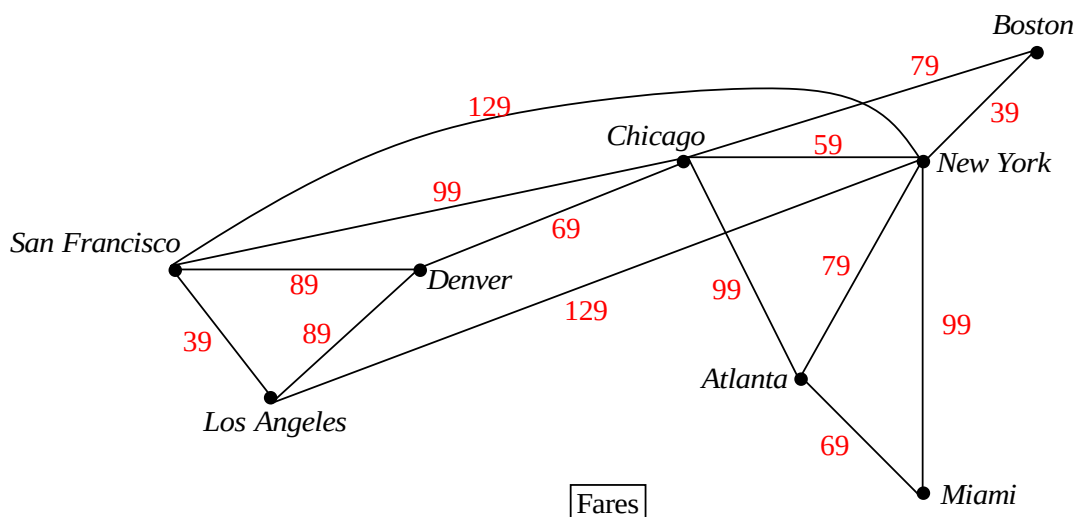
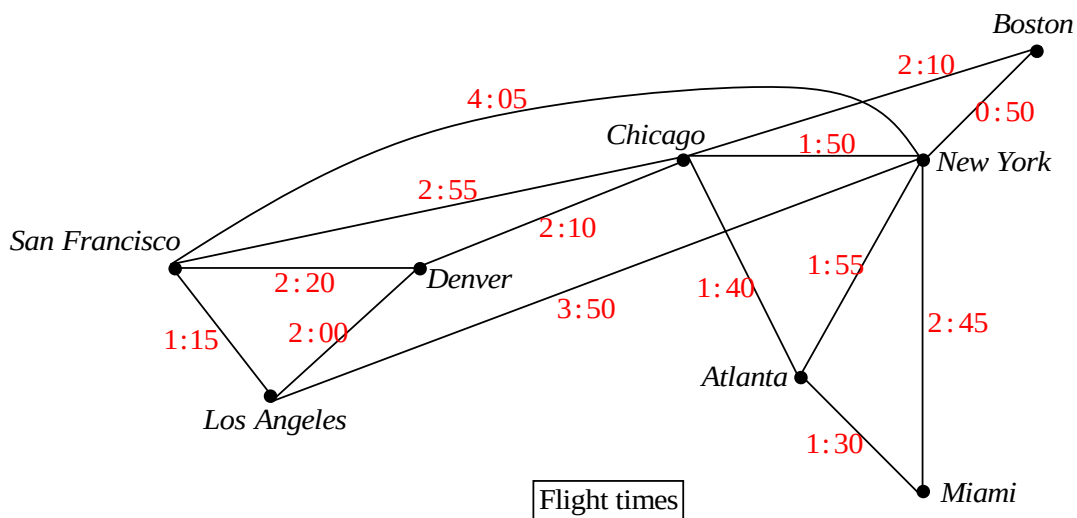
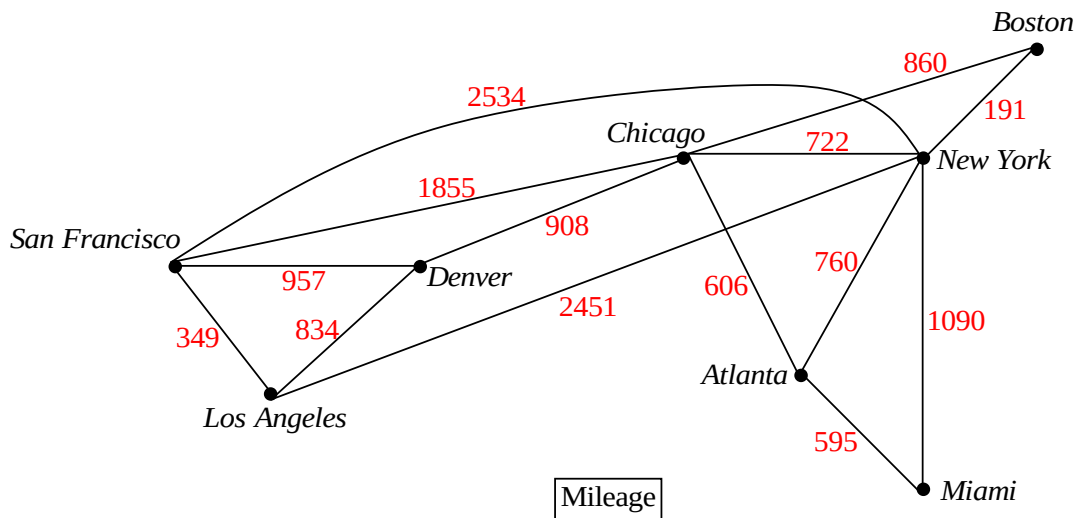
在眾多的方案中，你會選擇哪種方式抵達北一女中呢？

若以方便性來說，搭計程車是最方便的選擇，但是所花的費用最高。在考慮所花的時間下，騎機車是能夠最快速抵達北一女中，經濟上也相對花費較少，但就人身安全的考量下，騎機車卻是危險程度較高的方式。走路到公車站，搭乘公車至台北火車站後再步行，可能是相對較安全的選項，只是要等公車、要步行，若是氣候不佳的天氣，步行卻是一種很不方便的方式。

事實上，任何一種方案都有其選擇的可能性，就看個人當下的考量為何。

考量的因素不同，對於圖上邊的權重，賦予的方式就有所不同。因此在討論問題之前，我們應先釐清，我們要討論的問題，究竟你在乎的本質是什麼？

以美國城市之間的航班飛行問題來舉例，以下為幾個都市之間的航班系統，在各地之間的航線中，可以探討每個都市之間的「哩程數」、「航行時間」、以及「費用」。根據資料，我們可以建構出相關的權重圖，如下所示：



根據以上建構出來的權重圖，我們可以從中探討以下問題：

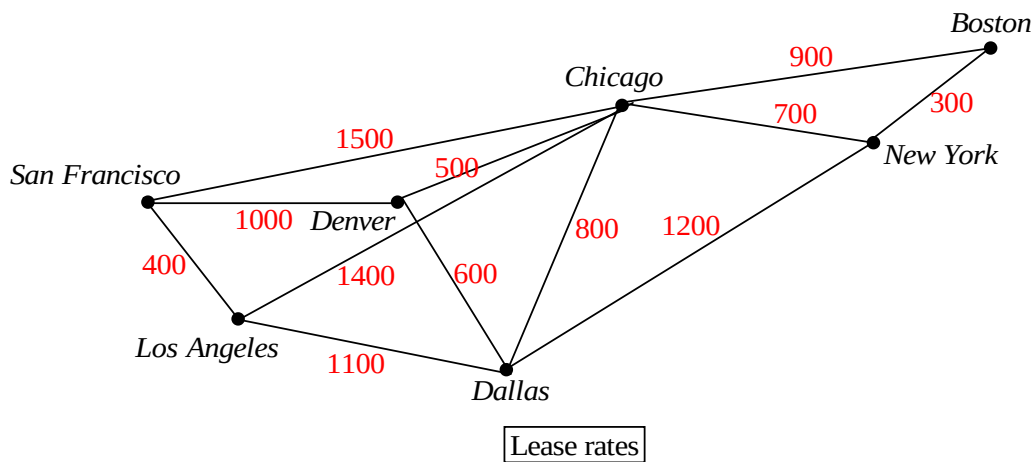
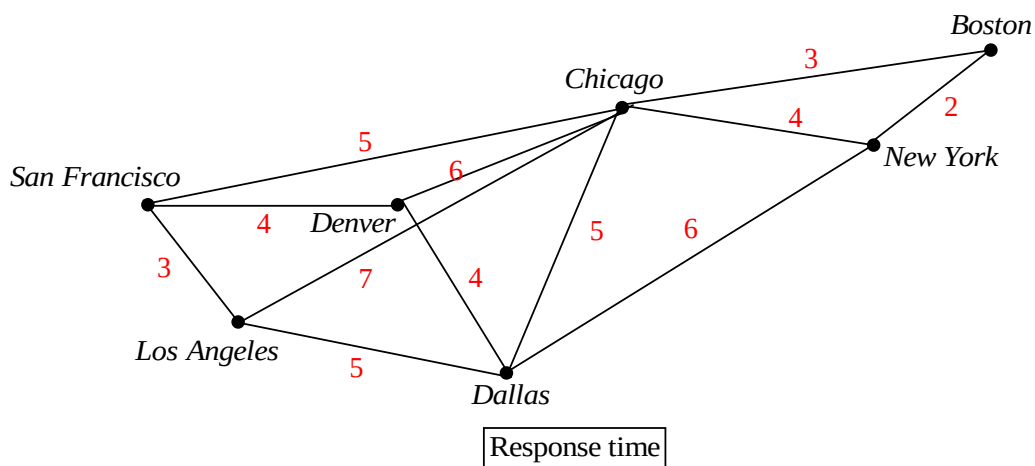
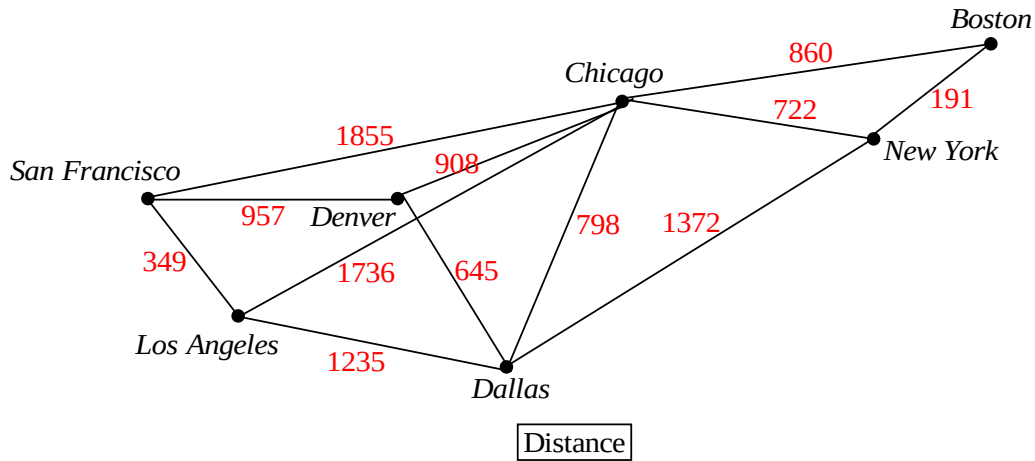
問題 01：試求出舊金山到紐約的最短飛行哩程數？

問題 02：試求出舊金山到紐約的最短飛行時間？

問題 03：試求出舊金山到紐約的最便宜的價格？

當然現實生活中，尚有更多問題，可以用權重圖來表示。

若要建構一個都市之間的網路系統，計算成本時需考慮都市之間的「距離」、「訊息回應時間」、以及「租金費用」等等因素。以下則為建構出來的權重圖：

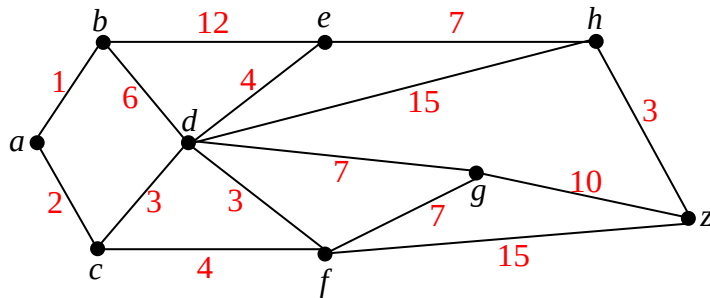


該往哪走？

一個實際的問題，通常資料數據都相當龐大，建構出來的權重圖，其點與邊的架構也都很複雜，為了要能夠有效率的找到較好的答案，我們需要發展一個具有程序性的解決方法。

【例題 1】讓我們先從簡單的例子著手，根據下面的權重圖，試尋找出由 a 點到 z 點的路徑，使路徑上的邊其權重總和最小（最佳化）？

【講述前，先讓學生知道，這裡的權重可以有不同的解釋，應視實際問題而定】



(問題 3) 上台分享小組求出最小權重的值與路徑走法，並展示小組求出最小權重的方法？

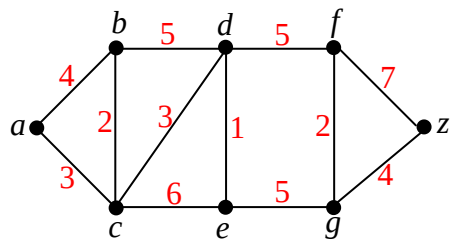
一般而言，欲求出路徑使得邊上權重總和最小，其意義是「以最少的資源達成目的」，是一種最佳化的概念。因應不同的實際問題，邊上的權重將具有不同的意義。

方便起見，若在所建構的權重圖上，一條路徑的權重，指的是此路徑上所有邊的權重總和。

指定起點與終點後，若某個特殊路徑其邊上權重總和為所有路徑權重的最小值，我們將此路徑簡稱為權重圖上的「**最短路徑**」，其最小值稱為「**最短路徑的值**」。

【例題 2】針對下面的權重圖，試尋找出由 a 點到 z 點的最短路徑與最短路徑的值？

(此題的目地僅在於讓學生再次練習，確認小組的方法所求出的值，授課老師可自行取捨)



程序性作法：演算法概念的發展

【以下，積極引導學生發言，確保每個學生都知道目前要面對的課題為何？對於問題後續的發展，能夠主動提出哪些觀點。營造此問題是尚未有正確答案的氛圍。】

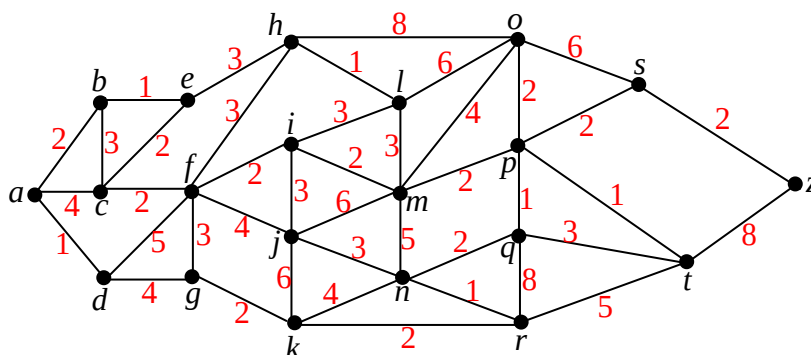
本人認為有以下重點需要啟發學生主動思考：

1. 與實際問題的連結。
2. 將問題建模的過程。
3. 最少資源的概念。
4. 問題複雜度的批判。
5. 研發程序性作法的必要性。
6. 較佳解與最佳解的取捨。
7. 最佳解的存在性。
8. 最佳解的正確性。

一個實際問題，建構出來的權重圖，針對特定的起點與終點，求出最短路徑與最短路徑的值（以最少的資源完成目標），是我們目前需要面對的問題。不難想像，隨著圖中點與邊的個數增大，建構出來的權重圖規模將更複雜，我們勢必需要發展出一套具有程序性的方法來因應問題的複雜程度，換句話說，不論點與邊的個數有多少，我們都希望能夠有方法，以有效率的方式來求出最短路徑（若找不到最佳解，那較佳解呢？），並能確保我們所求最短路徑的正確性。

（問題4）在嘗試過兩個例子之後，你能否發展出具有固定程序性的作法（演算法），求出最短路徑？小組討論後，各組上台發表其方法，其餘組別負責批判各組作法的合理性。

【例題3】對於下列圖形，各小組以其程序性方法，求 a 到 z 的最短路徑？



最短路徑的正確性

各小組討論後，個別發展出屬於小組的程序性作法，因此各小組隨著專屬的作法（演算法），必然可以求出一個答案（未必是最佳解），但如何確保所求的答案為最佳解？

【引導學生主動質疑答案的正確性。】

PS：在學生尚未體會之前，「演算法」字眼不宜在此出現。

（問題5）小組討論後，以報告的形式，上台發表，就各小組的程序性作法，說明所求出最佳解的正確性，並由其餘小組成員進行批判。

標準程序性作法

在小組分享各自的程序性作法之後，選擇較佳的組別，協助修正，並寫出求解的 SOP。
(但如果每一組的方法都離標準演算法很遙遠的話，那就比較麻煩了，還得再花時間帶學生進行批判討論)

在發展標準程序性作法之後，將學生的方法引導至 Dijkstra's Algorithm (補充在後面)。
寫出求解的 SOP：(第 1 步驟、第 2 步驟、第 3 步驟、.....)。
將此 SOP 執行在先前的三個例子，再一次求出最短路徑。

【以上不宜直接說出 Dijkstra's Algorithm 的方法，而是直接隨著小組的作法，協助學生列出標準作業流程，讓學生能主動體會到 Dijkstra's Algorithm 的演算步驟】

標準程序性作法的優化

在引導學生制訂標準程序性作法之後，嘗試重新解決先前的三個例子，在紙筆計算上，是否認為過程過於複雜，並思考是否可以將程序優化，方便人工處理最短路徑問題時，能夠更制式化的求出答案，以避免複雜的手續，造成計算上的錯誤。

(問題 6)發展了最短路徑的程序性作法後，在書寫的表達上，是否能夠發展一種簡明的方式(條列式、表格化、圖上記號更新法)，以便順利執行 SOP，並求出最短路徑與最短路徑的值。

【以上重點在於人工計算時，如果沒有好的寫法，則計算易混亂，雖然已有程序性作法，在紙筆計算上，仍須設計好的表達方式，畢竟人腦不比電腦。透過小組討論，讓各組研發出合適的表示方法，並訓練上台講解想法與報告的能力】

標準程序性作法：Dijkstra's Algorithm

以下提供最短路徑的演算法（Dijkstra's Algorithm），**僅供授課老師參考**。

Dijkstra's Algorithm 是由荷蘭資訊科學家 Edsger Dijkstra 於 1959 年發表，是一個圖上搜尋的演算法，對於一個權重皆為非負實數的權重圖，可求出以固定起點到其他點的最短路徑值（The single-source shortest path problem）。

圖論基本符號：

G 為一個圖、 $V(G)$ 為 G 的頂點集合、 $E(G)$ 為 G 的邊集合。

若 $x, y \in V(G)$ ，且 x, y 有邊相連，則記為 $x \sim y$ ，並將 x, y 之間的邊記為 xy ，意即 $xy \in E(G)$ 。

若 $x, y \in V(G)$ ，則 $d(x, y)$ 記為 x 點到 y 點最短路徑的值。

問題情境：

給定一個連通的權重圖 G ，其邊上的權重皆為非負實數。

$V(G)$ 為 G 的頂點集合，令 $u \in V(G)$ 為起點。

對所有 $x, y \in V(G)$ ，若 $xy \in E(G)$ ，則定義 $w(xy)$ 為邊 xy 的權重。

若 $xy \notin E(G)$ ，則定義 $w(xy) = \infty$ 。

欲求出 u 到任意一點的最短路徑值。

演算法想法：

令 S 為 $V(G)$ 的子集合，其中 $\forall v \in S$ ，最短路徑值 $d(u, v)$ 已確認。

當 $S \neq V(G)$ 時，對於 $z \notin S$ ，紀錄 $t(z)$ 為 u 到 z 在當下較短路徑的值（尚未確定是否為最短）。

若能持續擴充 S 使得最終 $S = V(G)$ ，則可得知 u 到任意一點的最短路徑值。

起始狀態：

設定 $S = \{u\}$ ， $d(u, u) = 0$ 。 $\forall z \notin S$ ，設定 $t(z) = w(uz)$ （ $t(z)$ 可視為暫時性路徑值）。

（若 $uz \in E(G)$ ，則 $t(z) = w(uz)$ 。若 $uz \notin E(G)$ ，則 $t(z) = \infty$ 。）

演算法迴圈：

1: 在 S 之外選定一個點 v ，使的 $t(v) = \min \{ t(z) : z \notin S \}$ 。

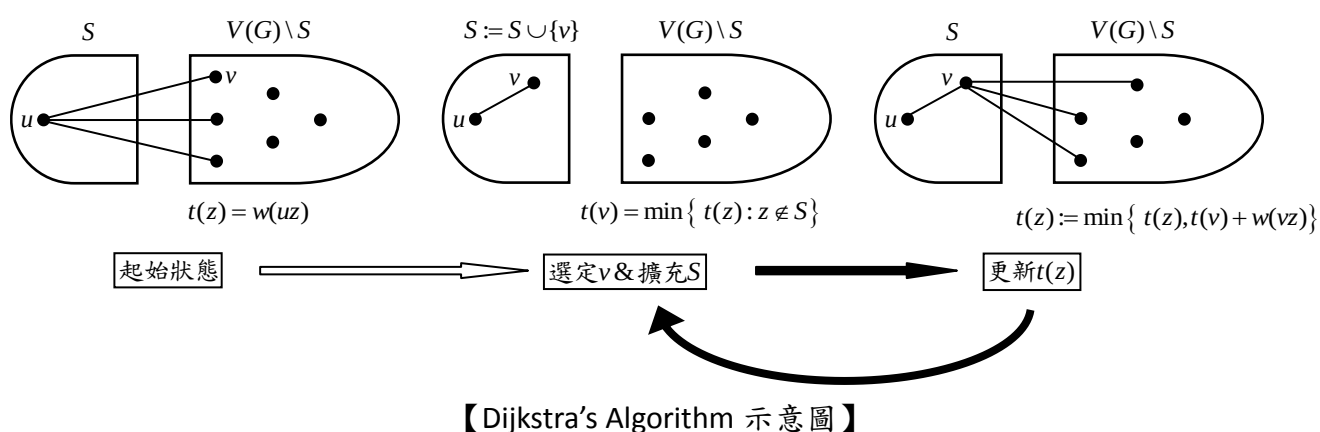
（由於頂點的個數 $|V(G)|$ 為有限，因此必能選取出此 v 點）

2: 將選定的 v 加入集合 S 當中（ $S := S \cup \{v\}$ ）。

3: 由 v 點向 S 之外的點搜尋，若 $z \notin S$ 且 $v \sim z$ ，則將 $t(z)$ 更新為 $\min \{ t(z), t(v) + w(vz) \}$ 。

4: 若 $S = V(G)$ ，則 $\forall z \in V(G)$ ， u 到 z 的最短路徑值為 $d(u, z) := t(z)$ （演算法停止）。

5: 若 $S \neq V(G)$ ，則重複步驟 1、2、3、4。



由以上演算法可得知，Dijkstra's Algorithm 結束時即可得知起點 u 到任意一點的最短路徑值。事實上，經過修正之後，不僅能求出最短路徑值，也能求出相對的最短路徑走法。

演算法複雜度：

在執行 Dijkstra's Algorithm 的同時，我們應該關心的是，有關最短路徑的問題，對於任意權重圖而言，需要多少的時間才能找到最短路徑值？

可想而知，權重圖的點與邊的個數，決定權重圖的規模。隨著點與邊的個數增長，演算法執行的時間也將拉長。透過尋找最小暫時性路徑值 $t(v) = \min \{ t(z) : z \notin S \}$ ，以及更新 $t(z)$

為 $\min \{ t(z), t(v) + w(vz) \}$ ，演算法執行的次數將視為 $|V(G)|^2$ 的規模，因此 Dijkstra's

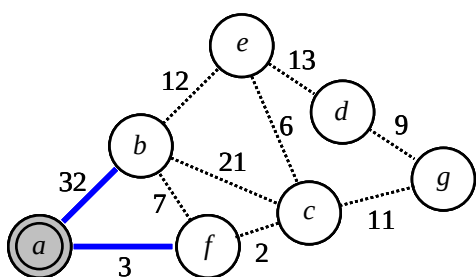
Algorithm 的複雜度為 $O(|V(G)|^2)$ ，意即，當權重圖的點數增為兩倍時，演算法所需執行的時間將增加約為原本的四倍。

特別的，針對「邊的個數相當稀少」的權重圖（sparse graph），可以將 Dijkstra's Algorithm 優化為複雜度為 $O(|E(G)| + |V(G)| \log |V(G)|)$ 。但對於一般圖形，仍然是原始的 Dijkstra's Algorithm 較實用，在程式語言上的結構也比較簡單。

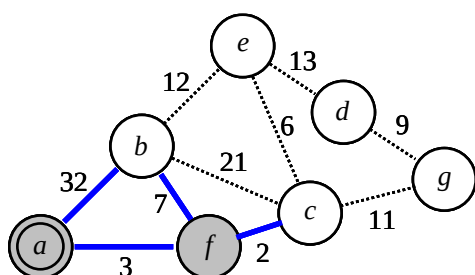
Dijkstra's Algorithm：表格記錄法

介紹完最短路徑的演算法 Dijkstra's Algorithm 之後，在人工操作此演算法時，有許多不同的方式來執行。將演算法步驟表格化是常用的方式，以下將舉例 **僅供授課老師參考**。

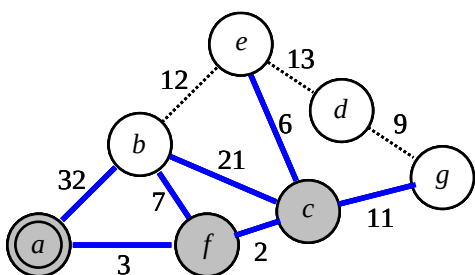
給定權重圖，試利用 Dijkstra's Algorithm 求出以 a 為起點到任意點的最短路徑值。



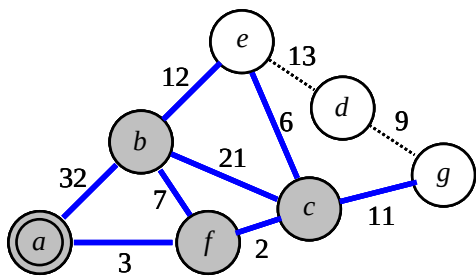
步驟	a	b	c	d	e	f	g	即將新增
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f



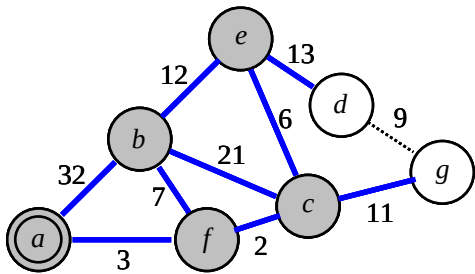
步驟	a	b	c	d	e	f	g	即將新增
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f
2	0	10	5	∞	∞	3	∞	c



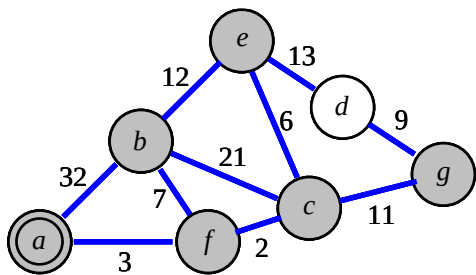
步驟	a	b	c	d	e	f	g	即將新增
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f
2	0	10	5	∞	∞	3	∞	c
3	0	10	5	∞	11	3	16	b



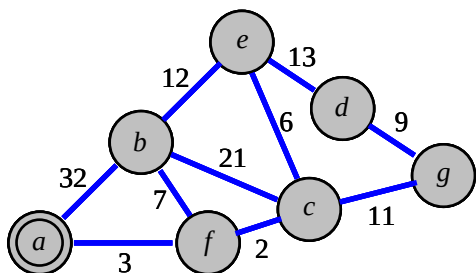
步驟	即將新增							
	a	b	c	d	e	f	g	
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f
2	0	10	5	∞	∞	3	∞	c
3	0	10	5	∞	11	3	16	b
4	0	10	5	∞	11	3	16	e



步驟	即將新增							
	a	b	c	d	e	f	g	
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f
2	0	10	5	∞	∞	3	∞	c
3	0	10	5	∞	11	3	16	b
4	0	10	5	∞	11	3	16	e
5	0	10	5	24	11	3	16	g



步驟				即將新增				
	a	b	c	d	e	f	g	
1	0	32	∞	∞	∞	3	∞	f
2	0	10	5	∞	∞	3	∞	c
3	0	10	5	∞	11	3	16	b
4	0	10	5	∞	11	3	16	e
5	0	10	5	24	11	3	16	g
6	0	10	5	24	11	3	16	d

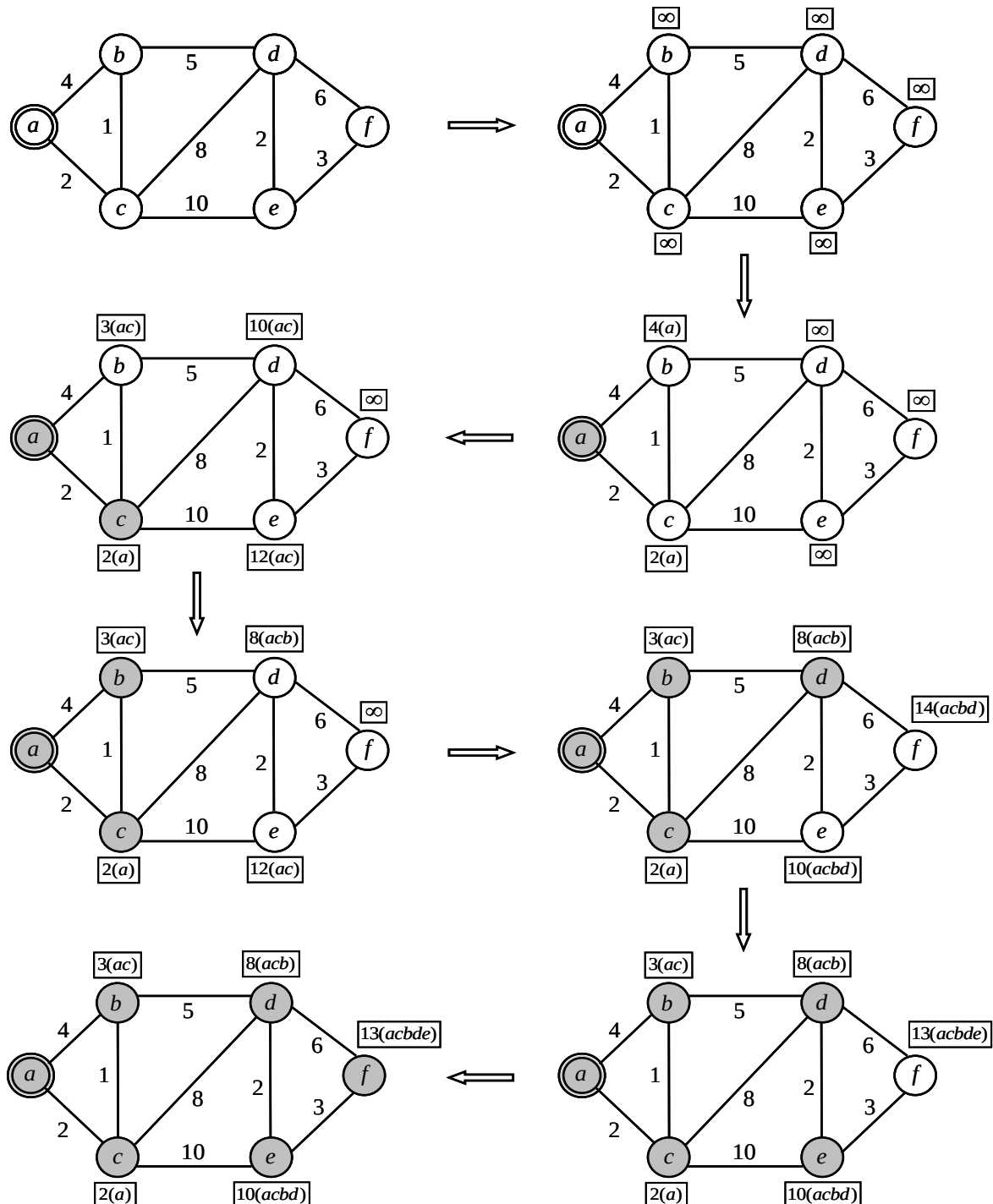


End	a	b	c	d	e	f	g
a	0	10	5	24	11	3	16

[此表格最終呈現a到其他點的最短路徑值]

Dijkstra's Algorithm：圖上記號法-1

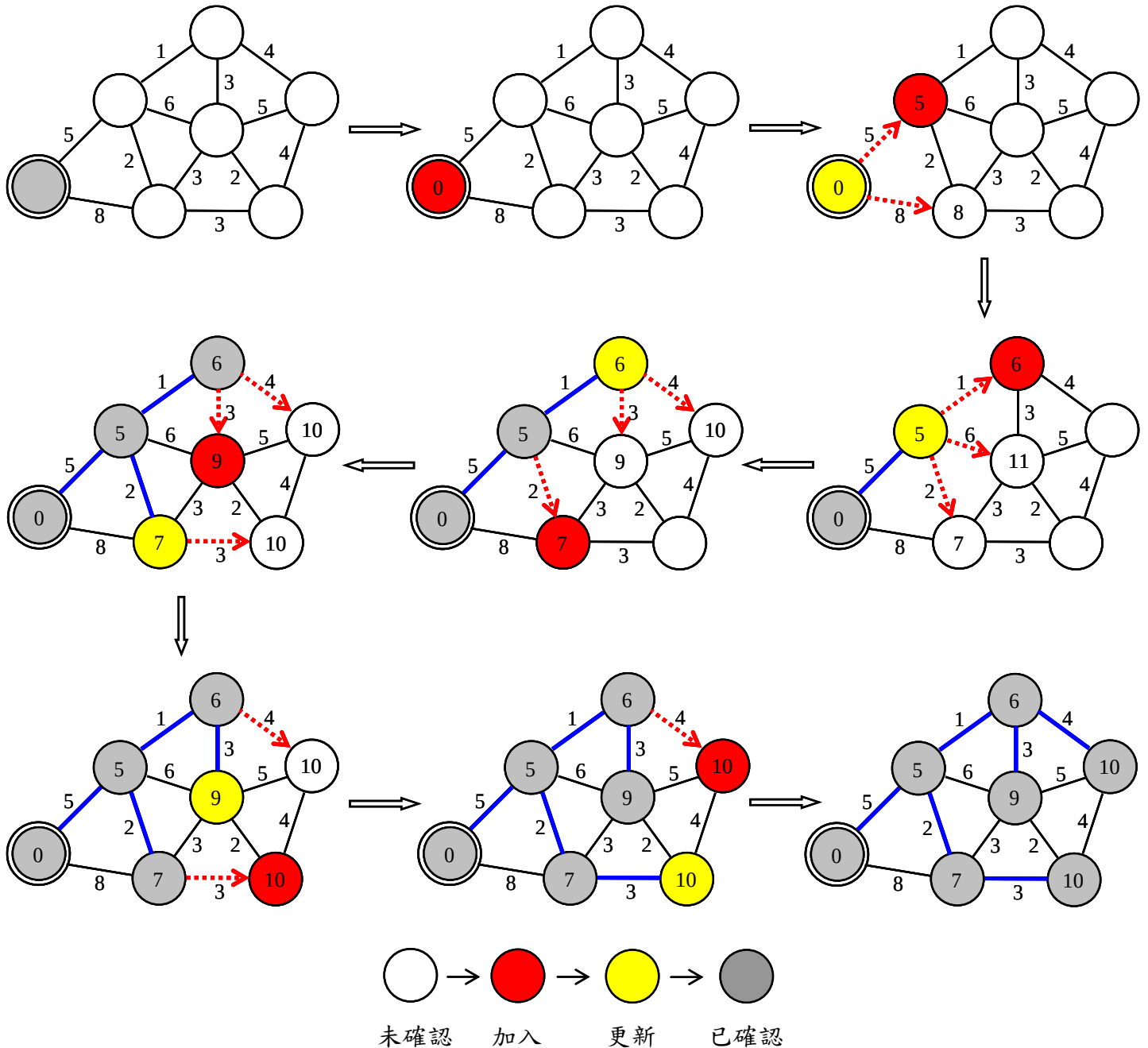
在執行 Dijkstra's Algorithm 時，除了上述將演算法的過程表格化以外，也可以直接在權重圖上做記號，以便求出起點到任意一點的最短路徑值，以下舉例 **僅供授課老師參考**。



以上的方法重點在於，將每次確認過的點做記號，代表已保證起點到此點的最短路徑值將不再被更新，而在每次更新暫時性路徑值的時候，一併記錄更新的來源為何處，如此一來，最終每一個點的最短路徑值都將確定，同時也能隨即得知最短路徑的走法。

Dijkstra's Algorithm：圖上記號法-2

這裡提供另一種執行 Dijkstra's Algorithm 的圖上記號法，以下舉例 僅供授課老師參考。



直接在圖上更新暫時性路徑值 $t(z)$ (虛邊)，並記錄決定性的邊 (藍邊)，已確認的點以灰色區域記號，直到所有的點都成為灰色區域後，則點上的數值即為起點到此點的最短路徑值。不僅如此，由於藍邊形成一個樹狀圖 (tree)，根據此樹狀圖亦可得知最短路徑的走法。

Dijkstra's Algorithm：人工執行的優劣分析

在各小組上台發表各自的標準程序性作法之後，授課教師可搭配上上述三種表示法（表格化、圖上記號法-1、圖上記號法-2），試分析各種不同方式的優缺點。

（問題 7）在知道權重圖上最短路徑的標準程序性作法之後，試分析各小組的方法的優缺點為何？各小組是否能綜合各小組的優點，發展出一套好的方式來人工執行求出最短路徑值與走法？

【以下為我個人對上述三種方式的分析，**僅供授課老師參考**】

1. 表格記錄法：

此方法較能夠清楚表達 Dijkstra's Algorithm 的原意，是此演算法的初學者最初能想到的表達方式，最終呈現的表格也能清楚的得知，在執行演算法的某個時刻當下的狀況。但缺點是書寫較複雜，只能求得最短路徑值，不易呈現最短路徑的走法。

2. 圖上記錄法-1：

為表格記錄法的簡化版本，比起表格記錄法，無須製作每一個步驟的表格，而是直接在圖上記錄各點最短路徑值與走法，是一種較具視覺效果的呈現方式。缺點為頂點過多的時候，圖上的記號將會變得較繁雜。

3. 圖上記錄法-2：

為圖上記錄法-1 的更簡化版本，直接在圖上操作並記錄已搜尋過的點，對於更新的來源，記錄在邊上，如此一來，無須多餘的記號，最終所記錄的邊將形成一個樹狀圖，由樹狀圖即可得知最短路徑的走法，對於頂點較多的時候，會比起圖上記錄法-1 來的方便。

【以上概念引導學生主動批判優劣，而非直接向學生闡述個人的觀點。當然對於資訊量較多的權重圖，還是得交由計算機來執行，人腦只提供想法，執行才是計算機的工作。】

數據的設計、人生的劇本：談高一選組

人生的道路上，從懵懂之際至今，似乎是在父母的保護下長大的，然而隨著心智成熟，逐漸的你會發現，進入北一的當下，緊接著就是忙碌的生活，接踵而來的活動、知識爆炸的學習，學習無限，但時間有限，你必須面臨一連串的選擇，向左走向右走？是的，你必須做出決定，而且是不斷的在做決定，每個決定，都影響著你人生道路上的沿途風光。

（問題 8）15 歲的小綠綠，想必常在心裡編織著自己的未來，如今面臨高一選組，未來更有許多方向可供選擇。在此試著規劃一下自己的理想計畫，以類組選擇、嚮往的大學、有興趣的科系、想要進修的輔系、進修、工作、出國遊學、結婚生子、理財方式、嚮往的退休生活等等眾多的類別進行討論。各種類別可設有 2~3 個選擇，並請賦予數值（1~5）代表嚮往的優先

程度，以權重圖的方式，粗略的規劃專屬於你個人的人生旅行圖。

【這裡是我認為這節特色課程最有意義的地方，但有賴於授課老師的口才以及人生經驗分享，啟發學生能自我探索。以下是我提出的五項要點，**僅供授課老師參考**。】

圖就是你人生的藍圖：

每個人的人生規劃都有所不同，住什麼地方？念什麼學校？從事什麼職業？相信每個人心中都有自己的理想標的，人生中的每一個決定，都將引導你通往下一個據點，回過頭來看，人生這一路走來，不就是一個錯綜複雜的圖嗎？只是每一個人心中的藍圖不同罷了。

權重就是你的價值觀：

即使都是就讀北一女中，但不見得每一個人都非得選第三類組，也不是每一位三類組的學生都得考上醫學系。重點應該在於，念醫學系是自己所嚮往的，抑或只是盲目的跟從？在人生的藍圖上，應該探索自己的能力與興趣，作自己想要的決定，以成就自己，因為賦予圖上權重的人是自己。

價值觀影響你的演算法：

所謂的短視近利或是深思熟慮，先苦後甘還是先甘後苦，都是人生中可能會經歷的過程，人生的每一步，就是依照你設計的演算法在執行，在每個人生的岔路口，你賦予什麼樣的權重，你就會做相對應的決定。人生就是由許多迴圈所構成，無法重來，但面對下一個人生抉擇點時，你卻可以慎思如何賦予人生道路上的權重。

他的演算法不適用於你：

人各有志，未來人生的道路也不盡相同，因此若只是一昧的參考別人的決定，最終將埋沒自己的天分與興趣。我們不要求人生中每一個決定都是最佳解，但總是要試著尋求較佳解。若是隨波逐流，即便是你天賦異稟，別人的最佳解也可能成為你的夢魘。

你有專屬於自己的美麗天賦：

在高一選組之際，這可能是個人首次面臨到人生第一次的重大決定，一、二、三類組只是大方向，一個人應考量自己的能力與興趣，做出決定，讓你的人生來成就你，而不是你來成就人生。

Dijkstra's Algorithm 的漏洞

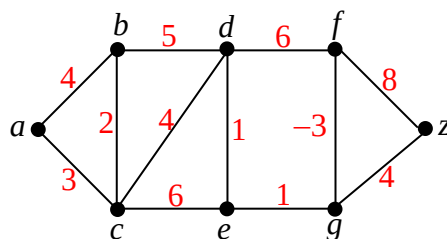
先前所探討的最短路徑問題，是一個實際問題的數學模型，從瞭解問題的起源直到權重圖的建構，這是一個數學建模的歷程。然而我們面臨不同的實際問題，情境不同，建模的條件將有所改變，意即，前面所提及的最短路徑問題只是一個特殊情境，你能設想到有哪些情境是我們實際生活會遇到的嗎？

(問題 9) 請你觀察最短路徑問題的情境，你認為在相關的問題之下，設想有哪些情境是現實生活中會遇到，但 Dijkstra's Algorithm 卻無法解決的問題？

【以下提供例子 僅供授課老師參考】

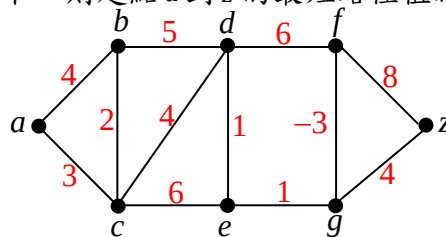
【負權重】

一般而言，在權重圖上討論最短路徑問題，我們很自然的不會走重複的路，以避免路徑的權重總和過高。基於現實中某種理由，權重圖上的邊的權重，有可能是負的，例如某間商場為了配合商業合作，可能針對某些特定人員給予優惠，以右圖而言， f, g 之間的邊權重為 -3 。

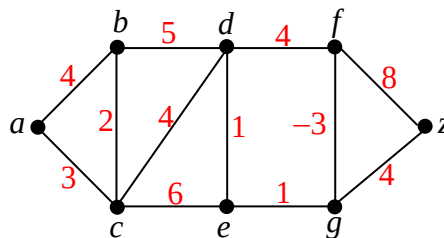


(問題 10) 在有權重為負數的權重圖中，不允許走重複的道路，則 Dijkstra's Algorithm 是否依然能夠順利找到最短路徑的值？若可以，請說明原因。若不行，試舉例說明並研討是否可以設計另一個演算法來解決具有負權重的最短路徑問題？

(問題 11) 針對上述權重圖，在不允許經過重複邊的條件下，則起點 a 到 z 的最短路徑值為何？



(問題 12) 針對右下權重圖，在不允許經過重複邊的條件下，則起點 a 到 z 的最短路徑值為何？（與問題 11 相同，差別只再於 df 權重改為 4）



【有向圖 weighted digraph】

之前我們所討論的權重圖，每條邊上只賦予一個權重，事實上，一條邊 ab 可以想像為兩個有向邊 $a \in b$ ，分別代表 $a \rightarrow b$ 與 $a \leftarrow b$ ，每一個有向邊的權重又可以不盡相同。一個圖上的邊若是具有方向性，則我們稱為「有向圖 digraph」，若是有向邊上具有權重，則我們稱為此圖為「有向權重圖」。針對有向圖，我們當然也可以討論有向權重圖上的最短路徑問題。

以下問題可以引導學生主動批判，**僅供授課老師參考**：

1. 有向邊一定要雙向的嗎(能否某些邊僅為單向)？
2. 有向邊上的權重一定要相同嗎？
3. 若對於一個有向權重圖，其邊上權重皆為非負實數，則是否有相對的演算法來求得最短路徑的值？
4. Dijkstra's Algorithm 是否能處理有向權重圖上的最短路徑問題？
5. 有向權重圖上的權重一定要非負實數，最短路徑的問題才会有答案嗎 (Bellman-Ford) ？
6. 有向權重圖若具有負的權重，該如何求出最短路徑值 (不允許負環的存在) ？
7. 有向權重圖上的權重是否只能考慮一個實數，若考慮權重是序對呢？ (金錢與安全性的評估)
8. 對於一般權重圖 (有向或非有向)，是否能發展一套演算法，能夠得任意兩點的最短路徑值與走法？

(以上問題，老師於討論的時候解釋背後的意義)

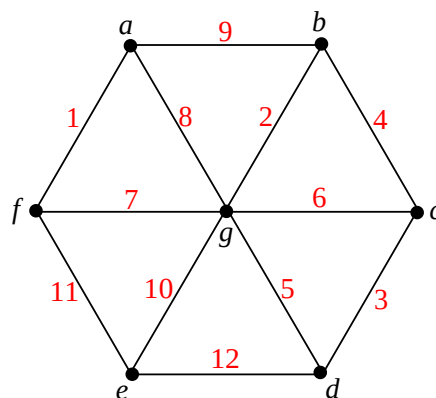
【以上重點就是要讓學生能夠發揮創意，逐漸把問題複雜化，因為人生的變因總是複雜，事情永遠不如你想像中單純。基本上是鼓勵學生勇於發表及創意思考，而不在於提出的問題，究竟有沒有正確的答案 (那是後續有興趣者的工作了)，也可讓學生感受到，邁入應用數學的領域後，很多問題的重點可能不在於是否有精確的答案，而是在於是否能「有效率」的找到較佳的答案】

【人生總是比數學問題還複雜，無法精算，但最終還是得給個答案！】

2. 最小生成樹 Minimum Spanning Tree

在介紹完最短路徑的問題之後，相信學生大多已經能感受到，將一個簡單的實際問題，轉換為一個圖形上的問題，這就是建模的概念。視授課時間而定，以下提供三個延續性的問題，僅供授課老師在課堂上靈活運用，發揮小組討論與表達能力。

(問題 13) 假設今天要在七個城市當中建立網路，使得任意兩個城市的網路都可以互通，考量建立網路的成本，如何花最少的錢，建立一個連通的網路（以無向圖來討論）？



上述問題為了使花費最少，又能讓每一個城市的網路可以連線，故最終架設網路的方式必為樹狀圖（tree），除此之外，這個樹狀圖必須要能夠連接到所有的點。像這種連接到圖上所有點的樹狀圖，我們稱為「**生成樹 spanning tree**」。

若在權重圖上討論生成樹，使得樹狀圖上的權重總和最小，則我們稱此樹狀圖為「**最小生成樹 minimum spanning tree**」。

(問題 14) 若一個權重圖，圖形結構更為複雜的話，是否可以發展出一個標準作業流程，可以將最小生成樹求出？（作法程序化、表格化）

【最小生成樹的問題，基本上有兩個常用且直觀的演算法，分別為「Prim's Algorithm」與「Kruskal's Algorithm」，兩個演算法的概念都不難，相信在各小組討論上台發表時，必然會有小組能夠發表此演算法之一。】

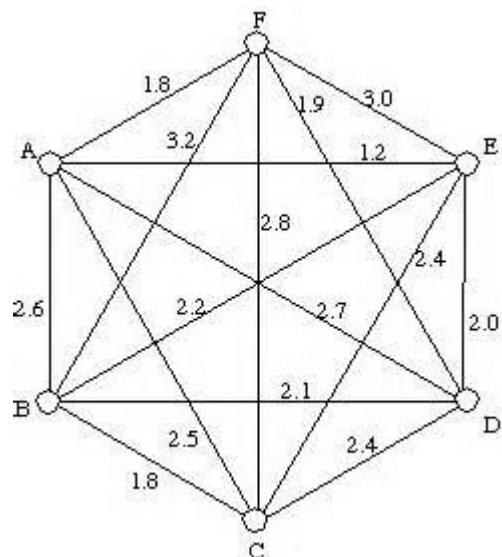
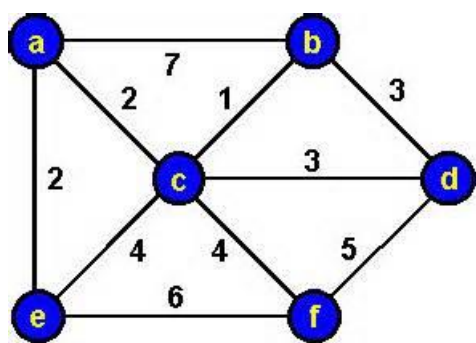
Prim's Algorithm：

給定一個連通的無向權重圖，不斷的選擇欲加入的邊，使的圖形維持為樹狀圖，在此條件下，總是選擇權重最小的邊，然後加入此邊。在得到邊數較大的樹狀圖後，重複上述動作，直到所得的樹狀圖已連結到所有的點，最終樹狀圖即為所求。

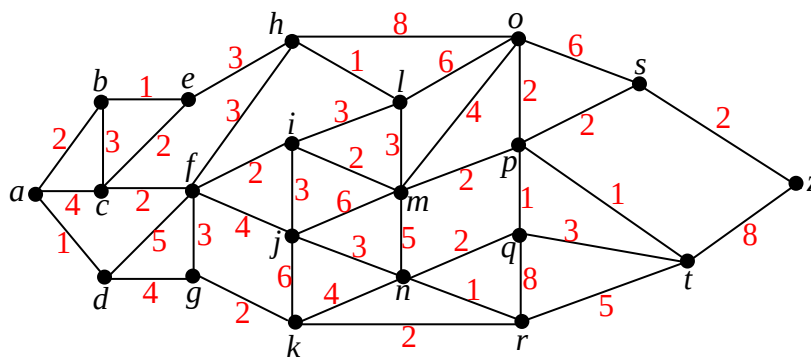
Kruskal's Algorithm :

給定一個連通的無向權重圖，不斷的增加邊，保持沒有迴路形成（可能不連通），在滿足這樣的條件下，總是加入權重最小的邊。在增加一個新的邊之後，重複上述動作，直到所得的邊都連結到所有的點並且形成連通圖，則此圖必為樹狀圖即為所求。

【例題 4】試求出下列權重圖的最小生成樹與最小生成樹的值。



【例題 5】參考下圖，試求出最便宜的連通網路建構方式。

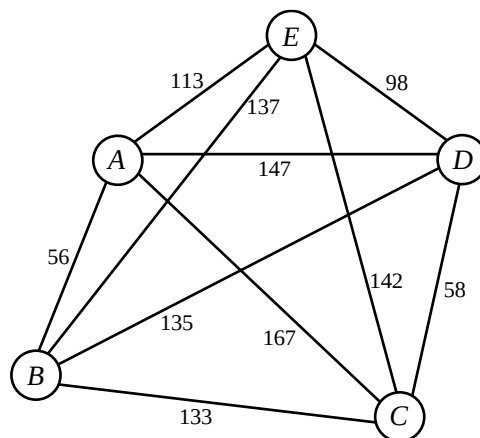


(問題 15)在學會了「最短路徑」與「最小生成樹」的問題後，對於此類的問題，你還能提出哪些見解與相關的問題？

(問題 16)試著小組討論，設計出一個情境，以點與邊的關係，提出您設計出來的問題為何？
(只試著提問，只先考慮問題的合理性，姑且不討論問題是否有標準解法)

3. 旅行銷售員 Traveling Salesman Problem

旅行業務員問題 (Traveling Salesman Problem) 是個有名的難題，旅行業務員要到幾個城市推展業務，從某處出發，每個城市恰只經過一次，再回到原先的起點，城市之間具有旅行成本，我們的問題是：固定一個起點，是否能找出一個最小成本的路徑，能經過每一個城市？僅供授課老師在課堂上靈活運用



旅行銷售員的問題，就是一個典型的難題，容易理解，學生也容易提出此問題，但對於一般圖形而言，卻沒有一個有效率的演算法可以求出最小成本的路徑值。

以暴力法來看，若權重圖的點數 $|V(G)|=n$ ，窮舉所有的情形，則最多需要 $(n-1)!$ 個 cases，這個級別的量，已經超越計算機的能力，可想而知，當點數 $|V(G)|=n$ 很大的時候，要檢驗所有的 cases 即是計算機無法辦到的了。

實際上，目前並沒有一個有效率的演算法能夠求得最小成本的路徑值。但退而求其次的，我們卻可以發展一個演算法來有效率的求出最小成本路徑值的較佳解。

(問題 17) 進行小組討論，並上台分享各小組的求出較佳解的想法為何？

(此處無須在乎演算法是否好壞，只需在乎學生表達時的觀念是否有想法)

(問題 18) 你覺得在旅行銷售員的問題當中，一個尋求「較佳解」的演算法之優劣，該以什麼樣的基準來評斷？

4. 中國郵差問題 Chinese Postman Problem

今考慮一個街道圖，郵差送信需要經過每一條街道，然而街道的長短不一，所需花費的時間也有所不同，若從郵局出發，必須經過每一條道路，且最後回到郵局，則郵差該如何設計他的送信路線，使得他所花的時間最少能完成任務？僅供授課老師在課堂上靈活運用

這樣的問題稱為中國郵差問題，是由管梅谷教授於 1962 年提出此問題。

(問題 19)請小組討論，如何將上述的中國郵差問題以權重圖的概念來表達（建模的過程）？

這裡我們首先考慮中國郵差問題為無向權重圖。

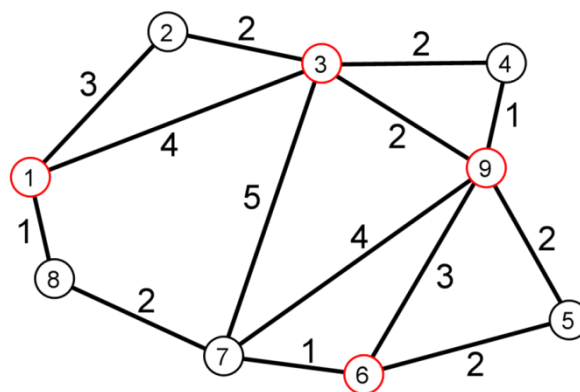
【具有尤拉迴路】

一個連通圖若能夠以一筆畫完成且終點等於起點，則我們稱此圖示具有尤拉迴路。我們知道，一個連通圖的每個點，皆與偶數個點相連，若且唯若此圖必具備尤拉迴路。由於郵差必須走過每一條街道，因此，如果相對於街道的權重圖是具備尤拉迴路的話，那麼任意一個尤拉迴路，皆是郵差可以選擇的送信順序，其所花費的時間皆最節省。

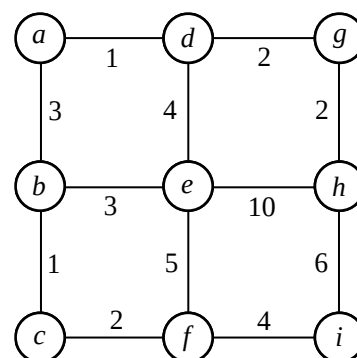
【不具有尤拉迴路】

面對一個不具有尤拉迴路的權重圖，才是中國郵差問題真正需要探討的情境。

(問題 20)考慮右方權重圖，試求出郵差以最少的時間完成送信的路徑走法為何？



(問題 21)考慮右方權重圖，試求出郵差以最少的時間完成送信的路徑走法為何？
(再次練習)



這一類問題的應用其實不只在郵差送信，其他像清潔工掃街、瓦斯或水電的抄錶員也是同樣的問題，以色列的一家電力公司便是一個成功的案例。原本這家電力公司須要 24 名抄錶員去負責某用戶區域的抄錶工作，管理單位的研究部門利用解決中國郵差問題的方法成功地尋找出有效率的抄錶路線，將原本所需的抄錶時間縮短了百分之四十。之後，該區域只須要 15 名抄錶員即可完成該區域的抄錶工作。

(問題 22)試著在有向權重圖上考慮中國郵差問題，你覺得這個問題容易解決嗎？
(事實上，在無向圖上是容易解決的，但在有向圖上，卻是 NPC 問題)

以下課程計畫以第一部份最短路徑與高一選組之問題進行介紹。

參、課程計畫

一、基本資料與學習目標

課程名稱	最短路徑與人生		特殊需求	獨立研究
教學年級/ 班級/組別	高中一年級資優班		相關領域	☐ 語文 ☒ 數學 ☐ 自然 ☐ 社會 ☐ 健體 ☐ 藝文
實驗學校/ 日期	北一女中 2015.09.01~2016.01.10		重大議題	無
教學時間	共 8 節 400 分鐘		教學者/ 設計者	楊宗穎
教材來源	自編		參考資料	
十二年國教 課綱 核心素養與 學習重點	核心素養	獨-U-A1 透過獨立研究的學習，促進自我觀念，從中擬定、執行、監督與評估調整生涯發展計畫，建立自我精進，追求至善。 獨-U-B1 能運用高層次思考能力分析比較、製作圖表，整理蒐集之資訊或數據，並彈性選用適切形式之口語、文字、影像、繪圖或實物或嘗試使用新媒體形式，表達獨立研究之過程、發現或成果、價值和限制。 獨-U-B2 能彈性運用科技、資訊與各類媒體，取得獨立研究過程所需之資料，並能解讀與批判，從中培養學術與研究倫理的素養。 獨-U-C2 能透過獨立研究，了解他人想法與立場，建立同儕思辨、溝通與包容不同意見的能力，學習分研究結果或協助他人進行研究。		
	學習表現	1a-II-3 能體會獨立研究的重要性與意義，並能願意嘗試。 1a-V-1 能從日常生活經驗、自然環境觀察、領域學習課程、新聞時事、社會輿論或社會重大議題等不同向度提出並發現自己感興趣的內容。 1a-V-3 能具備對於獨立研究的熱忱。 1b-V-1 能理解同儕報告，提出合理且完整的疑問或意見，與同儕溝通討論後，檢核彼此觀點差異形成評價並提出合理的建議或改善方案。 1b-V-3 能願意採納他人回饋，檢核、反思自身的研究歷程及成果，並持續修正。 2a-II-1 能了解獨立研究的基本內涵及應有的流程步驟。 2b-IV-1 能將蒐集的數據或資料，加以分析、比較，提出關聯與差異。 2b-IV-5 能運用簡單數理演算公式、科學證據或理論，理解領域知識或理論及其因果關係，或提出他人論點限制，進而提出不同論點。 2c-III-4 能善用各種創意技法產生不同問題解決的構想。		

		3a-V-1 能從日常生活、課堂學習、自然環境、科技運用及社會議題中，進行有計畫、有效率的觀察後進而察覺問題。 3b-II-1 能了解研究計畫的重要性及功能。 3b-V-1 能展現自我創意，根據研究問題、資源、期望成果等，規劃最佳化研究計畫。 3e-III-4 能從得到的資訊或數據，解決問題發現新問題。 3e-V-1 能流暢運用思考能力、撰寫研究日誌、製作圖表、使用統計等方法，有效整理、分析及比較已有的資料或數據。 3e-IV-3 能從得到的資訊或數據，分析出差異，提出研究結果與發現。
	學習 內容	● 研究主題興趣探索 ● 思考能力訓練 ✧ 批判思考 ✧ 問題解決技能 ✧ 自我引導學習 ● 研究方法介紹 ✧ 量化、混合研究法等。 ● 研究計畫撰擬與評鑑 ✧ 研究計畫內涵介紹 ✧ 研究計畫管理 ● 研究資料整理與分析 ✧ 基本統計分析介紹與應用 ● 研究成果展現 ✧ 研究發現與討論（結果與討論） ✧ 研究結論與應用（結論與建議） ✧ 展現形式 ✧ 表達技巧訓練 ● 研究過程與成果評鑑 ✧ 反思與建議 ✧ 自我評鑑與他人評鑑
獨立研究課程能力指標 (計畫研發)		1.3.2.1 能與同儕相互討論研究內容，提出合理且具體的評價或建議。 1.3.3.1 能針對感興趣之領域，深入探究其知識或原理，引發研究的動機與價值。 2.3.1.1 能了解可透過研究，分析與探究問題，進而著手驗證，尋找可能的合案或解決方法。 2.2.2.1 在教師的引導下，能針對不同的研究問題認識不同的研究方法。 2.3.3.5 能選用適當的圖表，將所蒐集到的資料加以彙整並分析比較。 2.3.4.3 能依研究需求，創新及改善研究技術。 3.3.2.3 能依據研究主題，蒐集過去相關研究資料加以分析、批判、評鑑，提出

	彼此的優劣與異同。 3.2.4.4 能自行或在教師的引導下提出策略，解決研究問題。 3.3.4.2 能掌握研究主題與目的，持續探討、檢核與修正。
單元目標	專業知識面— 1.能夠連結生活經驗，將實際問題轉換為圖形上的問題或數學問題(簡單建模)。 2.能夠明白最短路徑的問題與 Dijkstra's Algorithm 的執行步驟。 3.能夠自己發想一個有關路徑的生活問題。 思維批判面--- 1.能夠思考問題的呈現方式與多樣化的表達。 2.對於一個問題，可以發揮創意思考，提升將問題演化的能力。 3.能發揮個人參與小組討論的參與度，懂得聆聽他人想法，及台上口語表達能力。 4.能夠針對討論的內容提出質疑，對於求解的方法進行批判、優劣分析。 5.能夠釐清最佳解與較佳解的不同，並能夠思考兩者之間的取捨。 6.能夠從最短路徑問題，反思自我價值以及高一選組的方向。
學習目標*	1. 能理解策略的重要性。 2. 能理解何為演算法。 3. 能將實際問題建立數學模型。 4. 對於分析問題能有更新資訊的概念。
教學資源	有關演算法的講義與參考教材
教學方法/教學型態	講述、小組討論、演算練習、學生報告發表
教學環境/地點	教室

註：在學習目標方面，可視學生能力及誠度分為高能力組(H)、中能力組(M)與較弱能力組(L)擬定不同層次目標，並在各學習目標後面註明該目標適用的對象。例如：三組皆須達到的標準(H, M, L)或高組要達到的標準(H)。

二、區分性教學設計

根據學生有興趣的研究主題進行討論與發表。

三、教學計畫與進度(可自行增列)

單元 名稱	學習 目標	教學規劃/活動/內容	時間	教學評量
課程 導入 (一)	理解策略的重要性。	形成圖論中 (i)權重選擇與 (ii)建置圖形的觀念，並由學生試算最短路徑。 1.開啟路徑話題：教師自製海報，帶領學生觀看海報中不同回家路徑。觀看投影片、以情境暖身。 2.文章閱讀 1(航線)與學生小組討論 1(交流回家路線)：教師以學習單進行科普文章閱讀，一方面有路徑選擇情境介紹，一方面讓學生接受新知；閱後分組活動為個人回家路徑交流，記錄在學習單上，課程最後收回批改。 3.學生張貼白板成果發表 1：以磁性白板張貼於黑板上，呈現分組討論狀況，大夥觀看各組呈現路徑選擇的方式。教師挑選某幾組上台發表，學生接受表達與聆聽訓練，教師並在黑板上移動白板做歸類 4.文章閱讀 2(旅店)與學生小組討論 2(交流猜想結果)：藉情境故事引出圖形表達需求；學生分組討論中刺激思考、想像力。 5.學生口語發表：請尚未發表過的小組或學生先說出自己猜想，其餘學生在聆聽後補充，教師也提供參考答案。	10 mins 15 mins 5 mins 10 mins 10 mins	個人學習單 1 上台口語發表 個人學習單 2
課程 導入 (二)	將實際問題建立數學模型。	1.學習單大班教學、佈題後討論：教師進行學習單大班教學，傳達數學知識；美國航班實例三小題指派計算，讓學生認識邊的權重。 2.遊戲式發表：學生接受輪流發表訓練；教師當場更動權重，點出影響。 3.學生小組討論 3(最短路徑第一、二題)：同儕分享方法、促成反思；藉由由簡入繁的路徑圖形題，發展小組演算法。 4.學生張貼白板成果發表 2：只先發表第一題，由別人的做法進行解法分析。紀錄交流感觸，完成含第 2 題的學習單。	12 mins 10 mins 18 mins 10 mins	個人學習單 3 第二套學習單一、二頁

		的最短(較短)路徑②針對第一、二週的上課內容寫出 500 字心得。		一頁圖例 4 第二頁心得
介紹 Dijkstra's Algorithm 及 發想	理解何 為演算 法。	理性與情意面 ：(i)演算法教學與策略 (ii)選組與人生 1. 何謂演算法？利用 ppt 介紹演算法的概念，並以綜合除法來說明演算法。 2. 回顧上周學生發展的策略：將上週各小組所發展的策略做簡單的回顧，並說明利用 ppt 擬定策略的重要性。 3. 策略與人生：以白話的方式，讓學生理解制訂策略的基本原則。 4. Dijkstra's 演算法：遵循制訂策略的原則，發展出 Dijkstra's 演算法。而後透過最短路徑學習單，讓學生當場模擬電腦執行演算法。 5. 數據的設計，人生的劇本：從最短路徑問題連結至選組問題。之後老師進行人生經驗的分享。	15 mins 15 mins 15 mins 25 mins 20 mins	個人學習單 撰寫心得
發展 創新 研究 問題 與口 語表 達報 告	分析問 題能有 更新資 訊的概 念。	創新 ：(i)開創新問題 (ii)口語表達與建模能力 1. 實際問題與建模：由現實生活發想，建立簡易的數學模型。建模過程不要求提供解法，但要求各小組必須將問題介紹清楚，並解說建模的過程。 2. 小組發表與小組之間互評。	15 Mins 80 mins	建模學習單 與互評表

四、應用與建議

延伸應用	有關演算法的延伸概念以及最小生成術、旅行銷售員與中國郵差等問題，可視學生的理解情形與學生的興趣決定是否放入課程中。
對超前或落後學生的建議	有關學生在處理問題或表達上，可視學生的狀況給予提醒與指引。對超前的學生可鼓勵其依此下去發展。

第一節 課程細節註記：

a) 環境布置、介紹課程架構---

- (1) 事先幫學生以 3~4 人指定分組座位，且在前面打掃時間商請一樂班級同學調整座位。每組先在桌上放置一片軟性白板，學生來到教室時，就依分組座位表入座。上完課最後，留 3~5 分鐘收兩回學習單並復原座位。
- (2) 教師在之前先做相關課程內容的提示海報，於上課前張貼在黑板最旁邊，讓學生知道今日上課架構，功能彷彿暖身。一開始上課，先以海報上的圖片向學生傳達課程精神，並以投影片導入更改路徑之情境，引導學生思考自身可能面臨的路徑選擇。

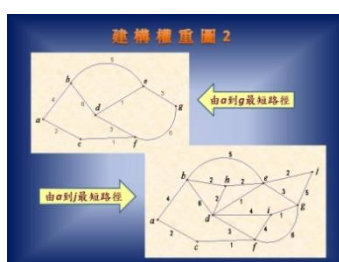
b) 情境素材搜尋、鋪陳---

在宗穎老師提供上課初步教材後，以授課教師自身經驗出發，於閱讀過的科普書與雜誌內找出可作為導入的閱讀文章（附件一：航線大解密、我在全世界的 1001 個家），以及透過網路尋求影片（小鬼當家與全面啟動），情節能與談話主題呼應，讓學生很快產生感覺。最後利用 Google Map 製作一女中到三重菜寮回家路線地圖，當作路徑選擇的範例。

c) 小組討論及發表，將以整套軟性白板為配套工具，在黑板上張貼、歸納整理。

可以不時更改發表方法，有時直接在座位起立發表，或者是各組先派人全都一起上台，再一個個說出解答與進行條件更改。如此較能讓學生提高參與度，每個人都有機會擔任發表工作。

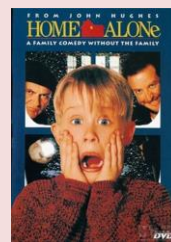
d) 學生的小組成果以白板呈現，但在討論中須敦促她們寫個人的學習單，留下記錄；課後每個人都交回，教師批改後下週發回，在學習單上能夠給予建議、提醒，也能針對同學的努力做鼓勵。



文章閱讀：航線大解密

在《小鬼當家1》這部片子中，主角因家中人口複雜且當天時程延誤，以致沒有跟上度假隊伍。當媽媽在旅館發現小孩孤獨在家後，心急如焚的她為了得到一個機位，試著以附加鑽石項鍊等物和已購票旅客交易。如果不成功，相信她會再去打聽轉機機票的情況，甚至連換乘長途巴士都會考慮。

就如劇情顯示一般，我們在交通旅程的考量，一般會想到的是『價錢』、『時間』這些因素，但有時特別一點的選擇也會出來，端看當下面臨的情境，當然現場能提供的條件也會牽動選擇。



知道嗎？有一位美國西北大學的電機教授阿馬拉爾在 2005 年研究 2000 年 11 月一個禮拜內全球班機的活動後，驚訝地發現如果想偵測機場於散佈傳染病中扮演的角色，起降班機數量並不一定是最相關的變數，以致最忙碌的芝加哥歐哈爾機場(每小時 100 架以上班機起降)不是首要關注點。那麼還有什麼？若計算直飛城市多寡，巴黎兩機場以 250 個城市奪冠；若是看該機場轉機連接兩個城市的最短航程數目，巴黎再度領先群雄，但第二名信不信由你，是阿拉斯加安克拉治的泰得史蒂芬機場，另外一個被忽略的熱門轉運站則是新幾內亞的莫士比港機場。如果莫士比港的運輸中斷，國際航空網絡有一大部分會與世界其餘部分切離。

拜讀過阿馬拉爾對世界 800 家航空公司的研究後，對於防範航空運輸成為病毒傳播上的跳板這件事上，相信我們除了歐美等幾個有名機場外，還知道不該遺漏哪裡。(資料取自《數學的秘密生命》)

分組活動

【想想看】你在平常放學後，是怎麼回到家裡的。這個交通路線會在什麼情況下改變，當時考慮的因素有那些？請舉出自己放學回家路線數條，如果希望讓別人分辨這些路線的不同，你要如何做呈現？

分組討論，選擇其中一位書面呈現

從學生的學習單反映：

1. 多樣考量下，回家路徑有很多不同選擇（讓班 33 歐子瑜）。
2. 有的人在圖示時重視意象（讓班 33 歐子瑜），有人則是不同路徑分開畫圖（誠班 18 高語彤），或是交錯路線（恭班 33 黃憶潔）；也有的想到像捷運那般圖示（射班 34 焦鈺雯、射班 32 曾家美），再進一部合併且加流線型（真班 3 王歆喬）。
3. 巧思的部分是，分成上學、放學不同路徑（真班 41 鍾伊涵）。
4. 有的學生主動認為要在路徑中加上中途據點和時間，已進入抽象的「圖」和「權重」。（仁班 32 廖佑琪、仁班 12 易烈瑜）

~女孩很適合此種繪圖題，表達簡潔漂亮（毅班 26 黃禹馨）。

文章閱讀：我在全世界的 1001 個家~商業週刊 1320 期優生活專文故事
在亞洲，找不到像他那樣對旅店癡狂的人，他可能也是亞洲住過最多旅店的人。

初識香港設計師張智強，以為他會談起讓他聲名大噪的 24 變「箱宅」，但一杯香檳下肚後，他就從口袋中掏出一件珍藏在身邊的寶物，隨意翻揀後即滔滔敘說著它們的故事，停也停不下。身為國際知名設計師，張智強為了什麼著迷？原來，由於設計案、演講、教學和擔任顧問等等工作，他經常飛往世界各地，平均一年超過 40% 的夜晚，都在旅店度過，他住過的旅館數量過千。旅店，像是他生命中不可或缺的情人。



到各國工作，他會刻意提早幾天到達當地，好到處探訪旅店，每一天換一家，他把旅店『參訪』視為不支薪的個人事業。似乎，他是為了住在旅店而工作著，多年累積下來，張智強花在旅店住宿的費用早可以買上好幾間精華區大宅，他卻情願只當個旅店的遊牧民族；甚至還計畫好了，將來在旅店中養老的夢想藍圖。

千家旅店經歷，張智強的身邊擺滿從各家酒店搜羅的「戰利品」，包括從紐約 Soho House Hotel 買來的浴袍、墨爾本 Prince Hotel 的拖鞋...，連音樂都常選聽各大酒店的 Hotel In-House CD。他也成為旅店評論權威，他的旅店故事曾被集結出書：《Hotel as House》，翻譯成三種語言在全球各地出版；2008 年、2010 年都被邀請以酒店專家的身分前去他國參加國際旅店研討會或展覽。

張智強指出，隨著世界的界線越來越模糊，以及人們生活形態的轉變，旅店的類型以不像從前只分為「商務旅店」與「度假旅店」如此簡單，旅店的風景已越來越豐富，越來越具個性風格，功能也相當多元。大膽創新，在傳統客房標準中、大之外玩不標準設計的實驗性旅店，更像是參與設計競賽般風起雲湧。有些旅店，自身建築蘊藏千百年的歷史魅力，改建成旅店後更有韻味；還有的旅店，就是旅行中唯一想去的目的地，讓人待上三天三夜而流連忘返。

布魯克白水溫泉大旅店



荷蘭鹿特丹 HNY

一進到旅店，張智強便會化為負有重任的秘密偵探，四處遊走探查。他有個怪癖，就是會先檢查各個樓層的「逃生圖」，但不是一般人以為的單看逃生路線圖。張智強說：「從逃生圖中，可以知道許多秘密，例如...」

分組活動

【想想看】在文章開頭提及，張智強設計師隨身珍藏的寶物，可以像他人展示他在各地所住的旅店。在你看來，什麼東西能達成這樣的效果，讓多家旅店袖珍收藏在設計師的口袋中？對你的答案，請附上它之所以被你選中的理由。

分組討論，口語或書面呈現

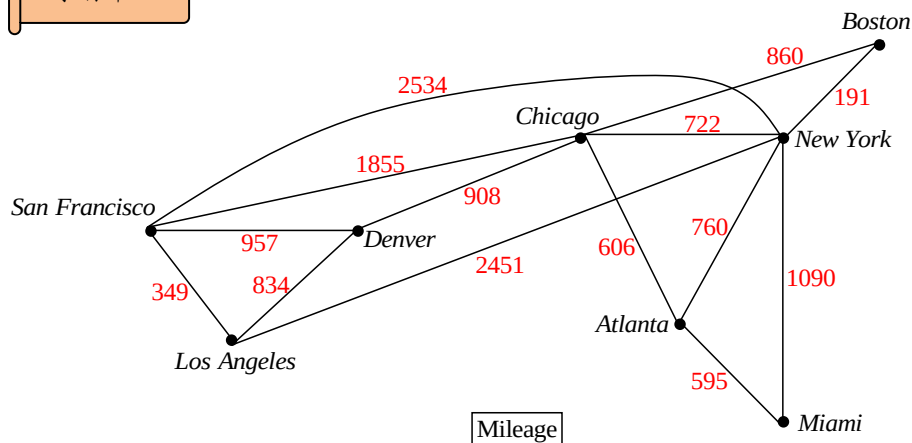
數班 11 佑倫認為口袋中藏一堆發票，可以看見時間、地點、做過什麼或筆記本，有自己的紀錄

讓班 33 子瑜覺得看逃生圖知道哪裡有密室，不同房間逃生的難易

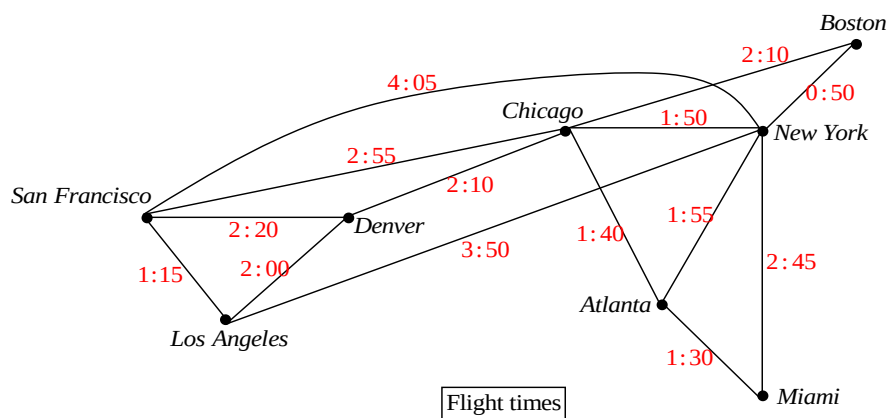
第二節 課程細節註記：

e)最後白板上圖形只有第一題，然後第二週上課為學生加上第二題增加路徑，點出兩題關聯，為下一週課程預作鋪陳。

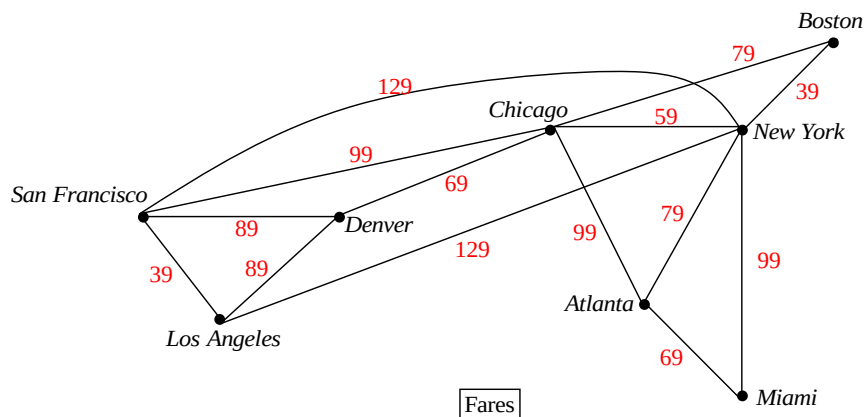
學習單 3



求最
舊短
金飛
山行
到哩
紐程
約數



可約
求最
舊短
金飛
山行
到時
紐間



求最
舊便
金宜
山飛
到行
紐價
約格

【任務】問題 01：試求出舊金山到紐約的最短飛行哩程數？

問題 02：試求出舊金山到紐約的最短飛行時間？

問題 03：試求出舊金山到紐約的最便宜的價格？

經抽籤後，指派各組只做 3 個問題其 1 來發表

解答：3 題皆以直達（2354 哩、4 小時 5 分、129 元）為最短路徑，合於常情。

若中途芝加哥為促銷，將飛行時間以改良機種壓縮為只剩原本的 0.9，

則舊金山經芝加哥到紐約的飛行時間降為約 4 小時 17 分；

價格以打 8 折因應，只剩 126.4 元，則可考慮改換路徑。

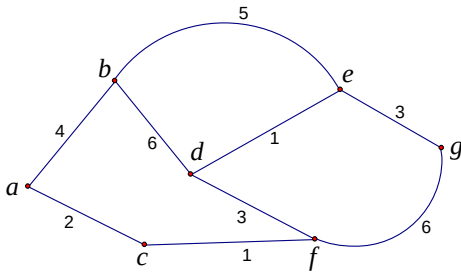


教師筆記教學

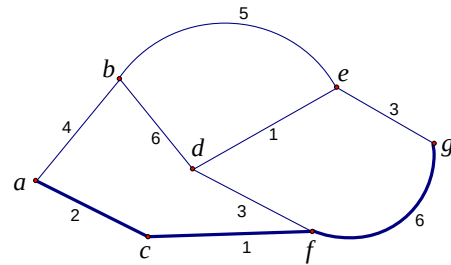
一個實際的問題，建構出來的權重圖，針對特定的起點與終點，求出最短路徑與最短路徑的值（以**最少的資源完成目標**），是我們目前需要面對的問題。通常真實資料數據都相當龐大，建構出來的權重圖，其點與邊的架構可能很複雜，為了要能夠有效率的找到較好的答案，我們需要發展一個具有程序性的解決方法。指定起點與終點後，若某個特殊路徑其邊上權重總和為所有路徑權重的最小值，我們將此路徑簡稱為權重圖上的「**最短路徑**」，其最小值稱為「**最短路徑的值**」（若找不到最佳解，那較佳解呢？），並能確認我們所求最短路徑的正確性。

最短路徑演算題 1 至 2

第一題：在下圖中，試求出由 a 到 g 的最短路徑(路徑權數的和)。



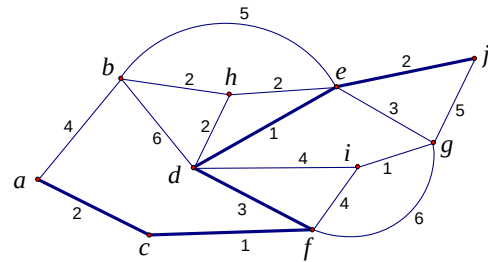
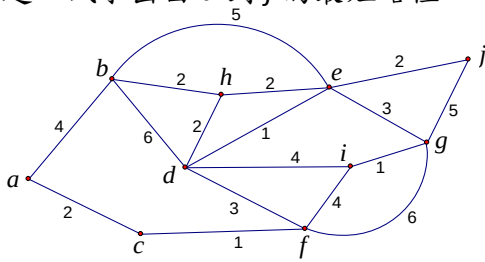
→ 解答



我嘗試處理這道題的方法：

我們這一組的同學，令我讚賞的方法有：

第二題：試求出由 a 到 j 的最短路徑。



教學指引與建議：

1. 講述前，先讓學生知道，這裡的權重可以有不同的解釋，應視實際問題而定。
2. 以下兩題圖形由簡單到擴展，實施時以各組討論及計算出最短路徑，第一題分組討論後先讓各組呈現結果，可將各組的結果(寫在軟白板上)張貼在黑板上，待學生完成第二題時，由老師的觀察，再挑選兩到三組作口頭報告，報告內容含第一題及第二題，但以第二題為主，說明①結果②完成此最短路徑的方法③有無改進第一題的方法或策略。挑選的組別，儘量以呈現結果與方法不同的組別(不一定要較好的方式)作口頭報告。

整理學生想法後須給的刺激：

1. 學生針對問題，定出解題原則（毅班靜榆），加入幾何不等式（真班傳瑀、歆喬、伊涵）輔助後，滿多人決定後比較刪除法（射班亦薌、鈺雯、仁班烈瑜、勤班湘晴），但沒有全盤考慮到：

- ① 不走回頭路似乎很明智，但若某處方向上折返，後續權數均超小，加總是否反降？
- ② 大多只顧及第一目標或前段的權數，沒意識到「加總」是看總體合併效果，有機會翻盤。
- ③ 使用比較刪除法時，怎樣才能不顧此失彼，留意兼顧全面效果（讓班子瑜）。
- ④ 也許出於直觀，學生大多選自己看中的路徑先試，譬如最上面、最下面那條，甚至先挑數字由 1,2,3 組成的（誠班語彤），但得點醒科學驗證的必要性，以及替代方案的考量。
- ⑤ 有人已想到微調方法（毅班靜榆），應針對此續發展。

2. 第二題，部分學生解出 $10: a \rightarrow b \rightarrow h \rightarrow e \rightarrow j$ ，

但也有正確解答 $9: a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j$ （勤班佳妤），多刺激她們反思。

學生在處理問題，尤其是表達上，該給建議：

- a) 面對問題，心態上不要太粗糙，回應只下標題，對照表達清晰的為數班佑倫。
可以告知：當我們和別人表達想法，說得細緻些，有利於自身和他人的合作。
- b) 既然列舉，卻又沒有列舉完全，須讓學生明瞭不嚴密的危險。

第三節 細節註記：

a) 環境布置---

同第一週的分組方式及座位安排：3~4 人指定分組座位，每組先在桌上放置一片軟性白板，學生來到教室時，依分組座位表入座。上完課，留 3~5 分鐘收學習單（第二套學習單 1~4 頁）並復原座位。

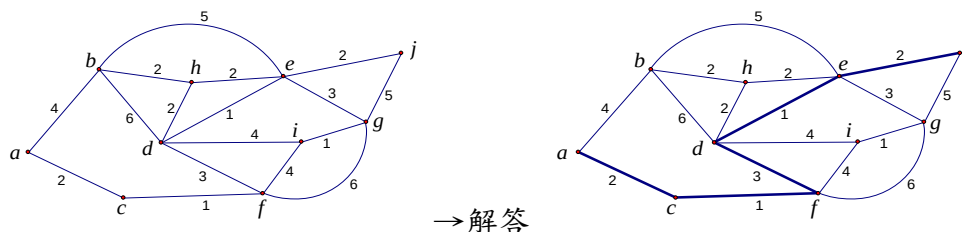
b) 可於課前即發回上一週的批改過的學習單，學生可以此為課程的暖身並拉回上週課程的回憶。也可以在第一次討論時發回學習單，優點是學生在討論之初，會先將注意力放在（第二套學習單第一頁圖例一）老師給的回饋，以此為出發點延續後面的討論。

c) 第二週課程引入---

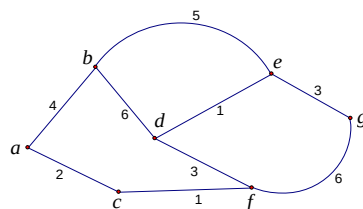
上課時先以授課教師自身經驗或相關題材出發（去美國自助旅行規劃路線的經驗），迅速的引入主題，並將第一週小組討論的結論歸納（利用直覺判斷、列舉、樹狀圖、比較、考慮三角不等式及轉折點數量等方法），利用 ppt 分類呈現給學生看。

d) 小組討論時，因為圖形已較上週的圖例一較為複雜，可提示學生我們的目的是為了解決一般性的圖形（例如老師去美國自助旅行時規劃路線要考量龐大的公路系統），除了引導各組除了找出最短的路徑，也應該儘量排除列舉、直覺等方式，試著找出一套較有系統、有程序的策略，這樣可有利發表時的說明，也可以為展開後續演算法的目的作準備。

- e) 圖例二的圖形是由圖例一再多加一些點和邊形成的，最短路徑(最小權重總和)是 $a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow j$ ，權重總和為 9，學生可在每個點選擇下一條路徑時，挑選權重最小的路線，但若與圖例一的圖形比較，即可發現這並非唯一的方法。但即使如此，仍希望學生在這個圖例發展「策略性解法」的概念，以利後續找尋最短路徑演算法的發展。



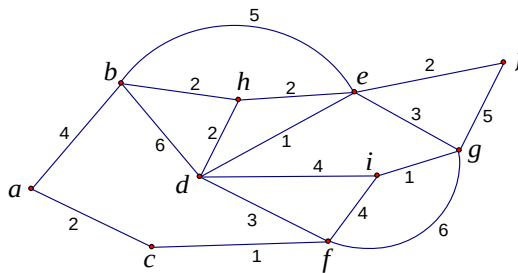
與圖例一作比較：若使用「遇叉路時選最短者」的策略，會發生如下 $a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow g$ 的路線，但此非最短路徑(最短路徑為 $a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow g$)。



- f) 小組發表，將以整套軟性白板為配套工具，在黑板上張貼、歸納整理。提供各組 B4(或 A3) 大小的圖及軟磁鐵，以供發表時使用。發表時可以與圖例一作比較，發表修正與改進的方法。
- g) 小組以白板呈現的結果留在黑板上，下課時供同學參考及提出優劣看法(可寫在黑板上白板旁)，在第二節的討論中，可以讓學生自由參考黑板及白板上的觀點。討論中須敦促她們寫個人的學習單，留下記錄；課後每個人都交回，教師批改後下週發回，在學習單上能夠給予建議、提醒，也能針對同學的努力做鼓勵。

上一題的圖形，點、線都較少，如果圖形稍微複雜一些，妳能否找出一條路線，使得從起點移動到終點，能得到比較短的路徑走法，甚至確認它是所有路線選擇中「最」短的。

第二題：試求出由 a 到 j 的最短路徑。



我嘗試處理這道題的方法：

我們這一組的同學，令我讚賞的方法有：

學生處理問題的想法：

(1)把圖分成小區域，再列舉每個區域的最短路徑。(第七組)

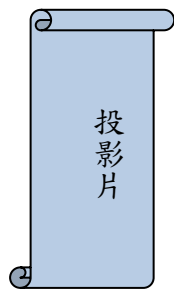
→分區域的方式是任意的，這部份難處理成演算法，但是分小區域討論的想法值得讚賞。

(2)連接起點終點，考慮在這條線附近的路徑；或由起點從終點「方向」移動，在節點選擇路線時不考慮朝向起點方向的路線。(第三組、第四組、第五組)

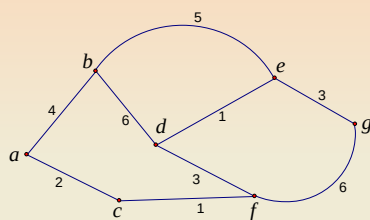
→有幾何直觀，但缺乏拓樸觀點，實際上路徑的權重未反應在線的長度及方向上。

(3)先考慮權數小的路徑；刪除連接兩點之較大路徑和。(第一組、第六組)

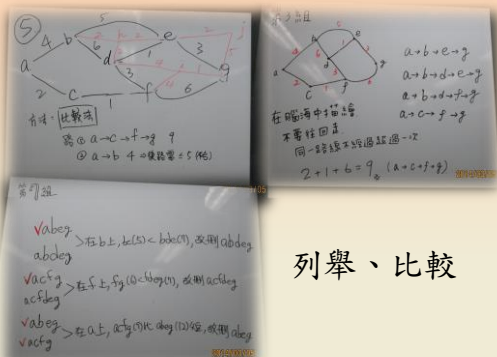
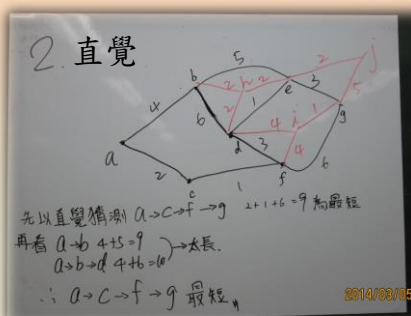
→提示應該要考慮兩點的選擇方法，而非任意選取。



上一週大家解決掉的問題：
從a到g的最短路徑

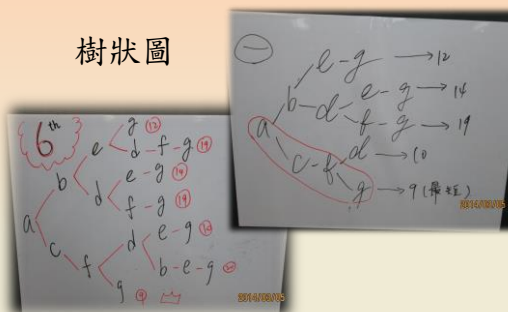


2. 直覺



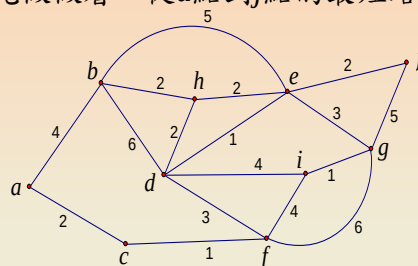
列舉、比較

樹狀圖



幾何、轉折點少的路徑

先做做看：從a點到j點的最短路徑

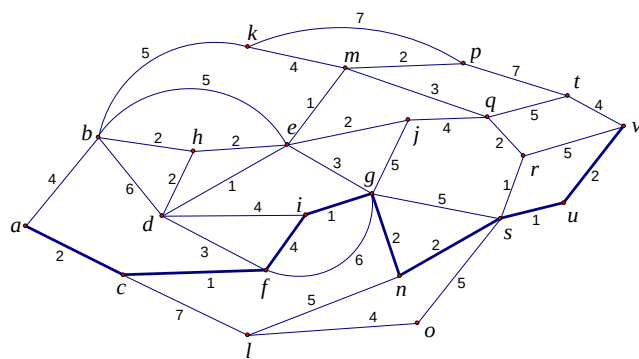


想一想，“直覺”、“列舉”、“比較”、“樹狀圖”...等等，
拿這些方法來處理這一個圖的最短路徑，是好的策略嗎？

第四節 課程細節註記：

- a) 一個實際問題，建構出來的權重圖，針對特定的起點與終點，求出最短路徑與最短路徑的值（以最少的資源完成目標），是我們目前需要面對的問題。不難想像，隨著圖中點與邊的個數增大，建構出來的權重圖規模將更複雜，我們勢必需要發展出一套具有程序性的方法來因應問題的複雜程度，換句話說，不論點與邊的個數有多少，我們都希望能夠有方法，以有效率的方式來求出最短路徑（若找不到最佳解，那較佳解呢？），並能確保我們所求最短路徑的正確性。
- b) 強調本節課的目的在寫出一個「可以讓電腦「機械式」遵守規則操作實施」的演算法，所以給出的「策略」是要能解決一般(任意)的(邊上有權重的)圖形。
- c) 演算法必需具備以下特性：
- 有限性 (Finiteness)：須在有限步驟內完成。
 - 有效性 (Effectiveness)：每個命令都須為可執行的步驟。
 - 正確性 (Correctness)：產生的結果必須是符合預期的。
 - 明確性 (Definiteness)：每個步驟必須是清楚明白。
- 換個簡單一點的說法，其實演算法就是所謂解決問題的方法。
- d) 可利用圖例二的圖來作演算法的示範，給出一個「非正確解答」但能找出一條路徑的演算法。以下以「遇叉路時選最短者」的策略寫出一演算法：
- 指定起點。
 - 從起點開始，比較與它相連的各路徑，選擇最短者，並指定端點為下一個起點，記錄路徑長，刪除此路徑。
 - 若指定的端點為終點，則結束動作，加總路徑長；若指定的端點仍非終點，則繼續步驟 ii。

- e) 圖例三是由圖例二再向外擴增的圖，但最短路徑的選擇有所不同，若學生在圖例二發展出在每一點更新及記錄，則可利用第二題的結論往外延伸，可便於發展出 Dijkstra's Algorithm 或其他的演算法。若學生未在第二題發展出每一點的更新及記錄，則會較辛苦，依照老師的觀察，若小組討論遇到瓶頸，可以此為提示。這一題的最短路徑(最小權重總和)是 $a \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow i \rightarrow g \rightarrow n \rightarrow s \rightarrow u \rightarrow v$ ，權重總和為 15。

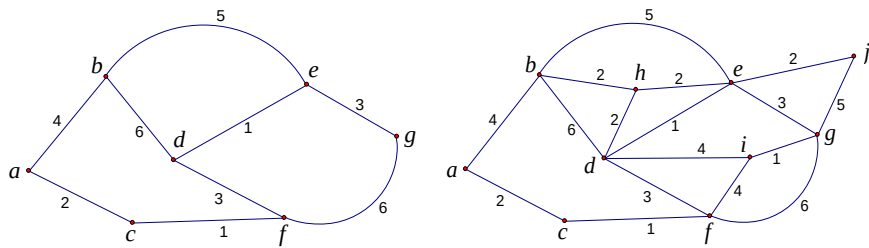


- f) 如果學生未能得到最短路徑的演算法，可讓學生只完成「選擇路徑」的演算法，目的只在於產生一套解決問題的想法，未能達成目標或無法判斷自己討論出來的演算法是否為最短路徑也沒有關係。
- g) 學生發表時務必讓各組同學專心聽講，可以要求在心得的部份分析其他組別的演算法。

「最短路徑問題 The Shortest Path Problem」 _____ 班 _____

有了前兩題的嘗試，我們現在要試著發展「策略」，即試著去找一個演算法，來「執行」一個移動最短路徑的方式。我們可以再利用較簡單的第一及第二個圖來思考，並試著拿更複雜的圖來檢驗自己所發展的演算法。

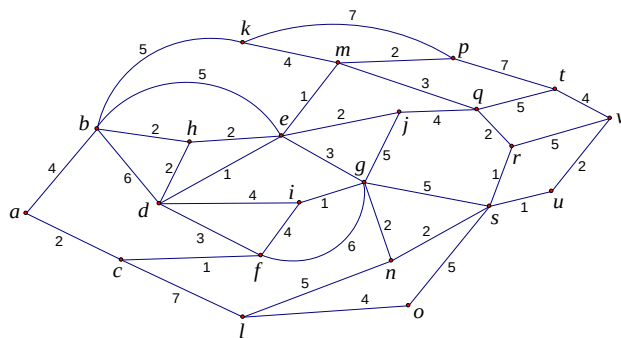
第三題：思考一下，在前兩圖的方法討論，能否發展出一個策略？



想法和討論：

試著寫出這個策略的「演算法」：

利用討論出的策略，求出由 a 到 v 的最短路徑。



學生解決問題的方法：

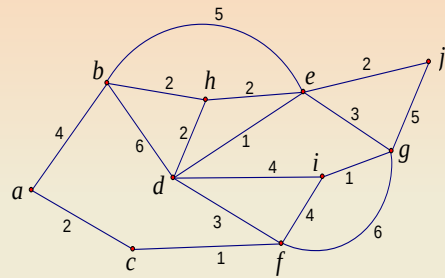
- (1) 找出起迄必經之節點，再考慮之間的最短路徑。(第二組、第六組、第七組)
→選擇「必經節點」的方式，未能有一般化的判斷方式(以直覺判斷)。之間的最短路徑方式也無策略性的方法。
- (2) 刪掉兩點之間可能發生較長的路徑，將圖簡化。(第三組、第四組)
→選擇兩點的方式，未能有一般化的判斷方式(只是任意選取距離較近的兩點)。
- (3) 分別由起點及終點開始，利用「遇叉路時選最短者」的方式找出兩條路線，比較兩者取總和小者。(第二組)
→頂多只是一個較佳的選擇，並非最短路徑。

投影片

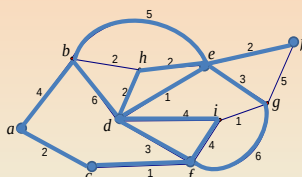
演算法必須具備以下特性：

- 有限性 (Finiteness)：須在有限步驟內完成。
- 有效性 (Effectiveness)：每個命令都須為可執行的步驟。
- 正確性 (Correctness)：產生的結果必須是符合預期的。
- 明確性 (Definiteness)：每個步驟必須是清楚明白。
- 換個簡單一點的說法，其實演算法就是所謂解決問題的方法。

從a點到j點的最短路徑



一種從a點到j點的路徑選法



1. 指定起點
2. 從起點開始，比較與它相連的各路徑，選擇最短者，並指定端點為下一個起點，記錄路徑長，刪除此路徑。
3. 若指定的端點為終點，則結束動作，加總路徑長；若指定的端點仍非終點，則繼續步驟2。

1. 選擇a點
2. 比較ab和ac的"距離"， $ac < ab(2 < 4)$ ，故選c點，記錄"2"
3. 考慮c點，只有cf一條線段，故選擇f，加總"2+1=3"
4. 考慮f點，比較fd、fi、fg的距離，因為fd最小，故選d點，加總"3+3=6"
5. 考慮d點，比較db、dh、de、di，因為de最小，故選e點，加總"6+1=7"
6. 考慮e點，比較eh、eb、ej、eg，因為eh和ej最小，故選h和j，加總"7+2=9"
7. 抵達j點，完成，路線為acfdelj，路線總和為9

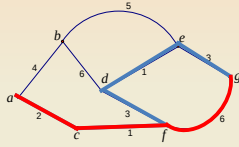
演算法

設 V_i 為點， E_{rs} 為連接點 V_r 通往點 V_s 的邊，則：

1. 選擇 $V_r = a$ 。
2. 設 V_r 為起點，考慮所有可能的邊(E_{rs})，選擇權數最短者，設為 E_{rt} ，記錄 E_{rt} 的權數後，刪去 E_{rt} 。令 V_t 為新起點(令 V_t 為下一個 V_r)，加總 $\sum E_{rt}$ 。
3. 若 $V_t \neq j$ ，繼續執行2.；若 $V_t = j$ ，選擇 $\sum E_{rt}$ 中最小的，停止動作。

例如，第一個圖例：

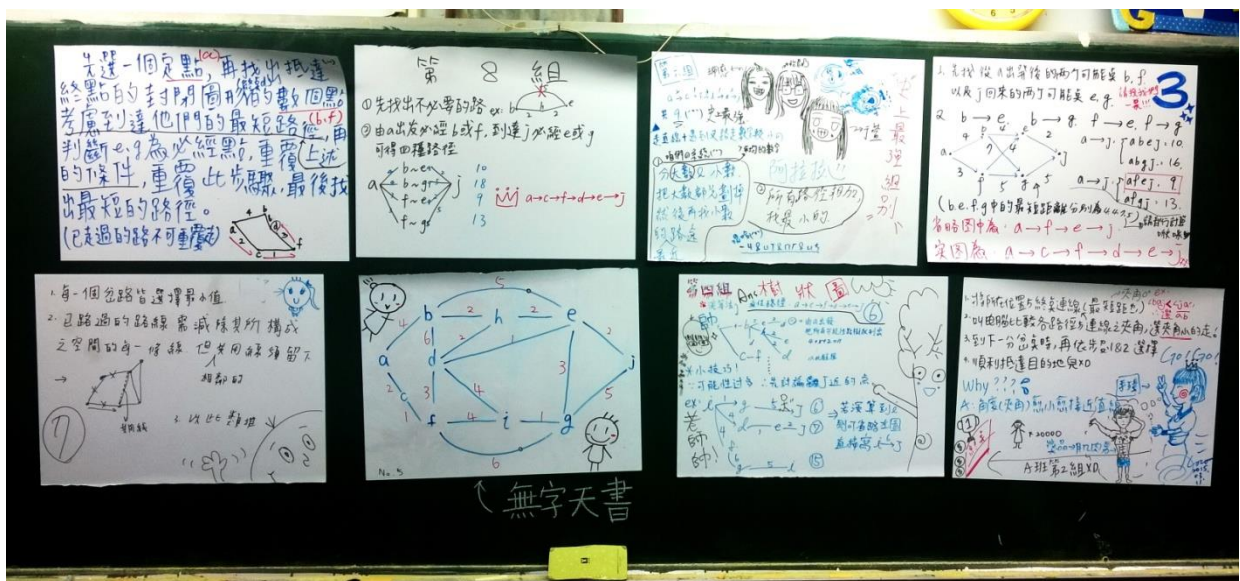
若利用此演算法，得到的路徑為 **acfdeg**，
但是最短路徑為 **acfg**。



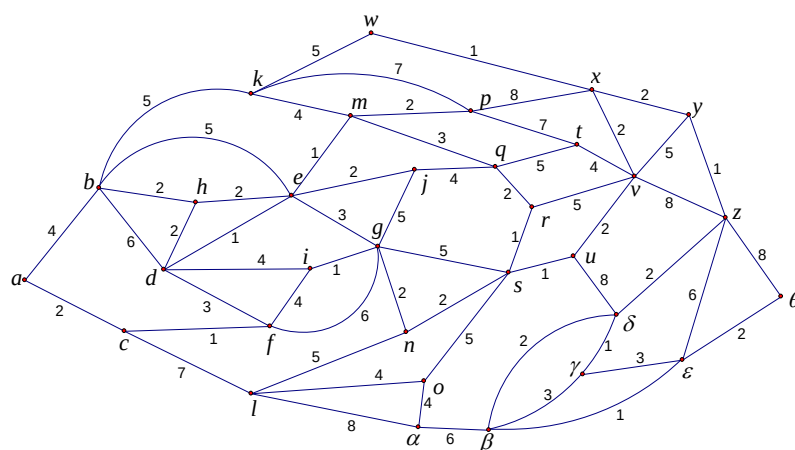
這個演算法，

只是「一種移動的策略」，

並非「最短路徑」的演算法



特色課程「最短路徑問題 The Shortest Path Problem」 班 _____



試求出上圖，由 a 到 θ 的最短路徑。

最短路徑問題課程心得(手寫約 500 字)：

作業的部份，有少數同學有寫到 Dijkstra's algorithm 的精髓，但未能強調「更新」的概念。(一誠高語彤、一讓歐子瑜、一讓逢芯宇)

何謂演算法？

演算法(algorithm)的意義為：
『在有限步驟內解決數學問題的程式』。

1. 準確描述的輸入
2. 每一指令必須具有明確性及有效性
3. 正確性
4. 有限性
5. 結果的描述和輸出

演算法：泛指適合被實作為計算機程式的解題方法。

何謂演算法？

$f(x) = 2x^4 + x^2 + 5x$ 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式與餘式？
 $g(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ \downarrow & 4 & 8 & 18 & 46 & \\ \hline 2 & 4 & 9 & 23 & 46 & \end{array}$$

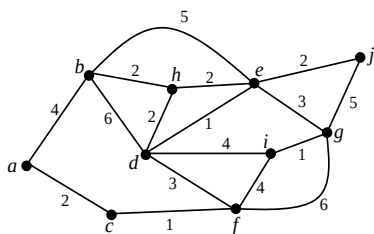
商 式 , 餘 式

商式 $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 23$
餘式 $r(x) = 46$

這就是演算法！

擬定策略的重要性

你以為你只要解決這樣的問題.....



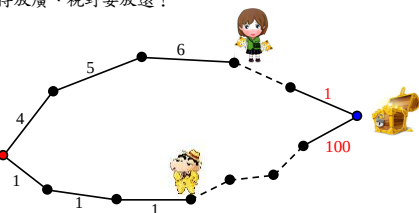
事實上.....，這才是你人生需面對的問題！



你該顧慮的細節？

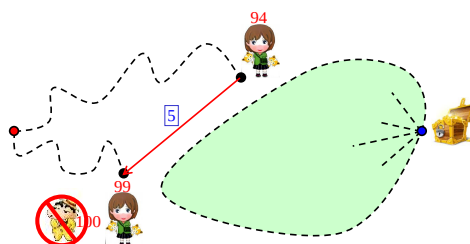
短視近利是人性

眼光得放廣、視野要放遠！



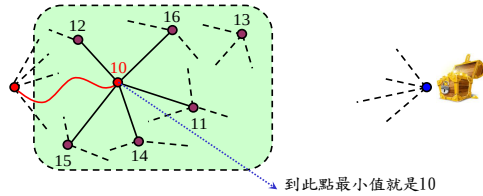
你該顧慮的細節？

隨時更新你的資訊！

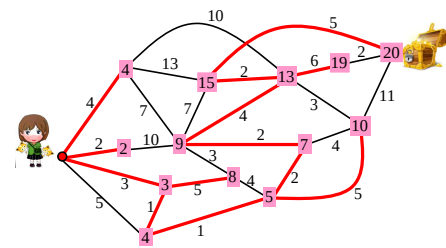


你該顧慮的細節？

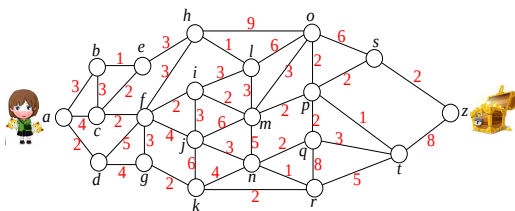
既然無法預測未來，那麼至少做到當下最好！



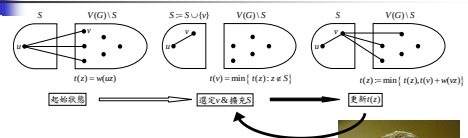
最短路徑演算法



請把自己當成電腦



Dijkstra's Algorithm



由荷蘭電腦科學家於1959年提出！



1930-2002

數據的設計、人生的劇本

人生的道路上，從懵懂之際至今。
似乎是在父母的保護下長大的。
然而隨著心智成熟，逐漸的你會發現... 進入北一的當下...
緊接著就是忙碌的生活，接踵而來的活動、知識爆炸的學習。

學習無限，但時間有限。
你必須面臨一連串的選擇，向左走向右走？
是的，你必須做出決定，而且是不斷的在做決定.....，
每個決定，都影響著你人生道路上的沿途風光。

圖就是你人生的藍圖

每個人的人生規劃都有所不同，
住什麼地方？念什麼學校？從事什麼職業？
相信每個人心中都有自己的理想標的。

人生中的每一個決定，都將引導你通往下一個據點。
回過頭看，人生這一路走來，不就是一個錯綜複雜的圖嗎？
只是每一個人心中的藍圖不同罷了。

權重就是你的價值觀

即使都是就讀北一女中，但不見得每一個人都非得選第三類組。
也不是每一位三類組的學生都得考上醫學系。

重點應該在於，念醫學系是自己所嚮往的，抑或只是盲目的跟從？

人生的藍圖上，應該探索自己的能力與興趣，
作自己想要的決定，以成就自己。
因為賦予圖上權重的人是自己。

價值觀影響你的演算法

所謂的短視近利或是深思熟慮，先苦後甘還是先甘後苦，
都是人生中可能會經歷的過程。

人生的每一步，就是依照你設計的演算法在執行。

在每個人生的岔路口，
你賦予什麼樣的權重，你就會做相對應的決定。

人生就是由許多迴圈所構成，無法重來，
但面對下一個人生抉擇點時，
你卻可以慎思如何賦予人生道路上的權重。

他的演算法不適用於你

人各有志，未來人生的道路也不盡相同。
因此若只是一味的參考別人的決定，
最終將埋沒自己的天分與興趣。

不要求人生每一個決定都是最佳解，但總是要試著尋求較佳解。

若是隨波逐流.....
即便是你天賦異稟，別人的最佳解也可能成為你的夢魘。

你有你專屬的美麗天賦

高一選組之際，這可能是個人首次面臨到人生第一次的重大決定。
一、二、三類組只是大方向。
應考量自己的能力與興趣，做出決定。

讓你的人生來成就你，而不是你來成就人生。

你有你專屬的美麗天賦

高一選組之際，這可能是個人首次面臨到人生第一次的重大決定。
一、二、三類組只是大方向。
應考量自己的能力與興趣，做出決定。

讓你的人生來成就你，而不是你來成就人生。

人生總是比數學問題還複雜.....無法精算.....
但最終你還是得給個答案！



最短路徑與人生第三週學習單-1

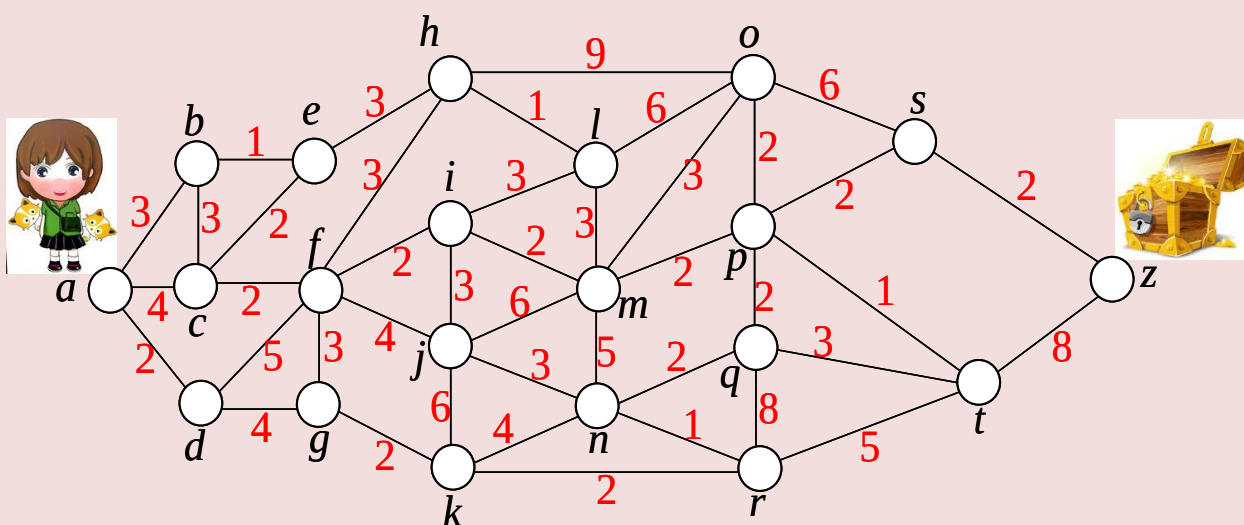
班級：

座號：

姓名：

組別：

試利用課堂上老師講述的演算法，求出起點到各點的最短路徑值！



將最後各點的最短路徑值填入各頂點的空白處，並將路徑走法的樹狀圖畫出！

最短路徑與人生第三週學習單-2

班級：

座號：

姓名：

組別：

15 歲的小綠綠，想必常在心裡編織著自己的未來，如今面臨高一選組，未來更有許多方向可供選擇。在此試著規劃一下自己的理想計畫，以類組選擇、嚮往的大學、有興趣的科系、想要進修的輔系、進修、工作、出國遊學、結婚生子、理財方式、嚮往的退休生活等等眾多的類別進行討論（類別不設限）。各種類別選擇，並請賦予數值（1~5）代表嚮往的優先程度，以權重圖的方式，粗略的規劃專屬於你個人的人生旅行圖。

單元心得：回顧這三週最短路徑的課程，帶給你什麼樣的感受？